Βέλτιστες Διαμερίσεις Πεδίων στην Παράλληλη Επεξεργασία *

Ηλίας Π. Τσιγαρίδας

et@di.uoa.gr
Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περίληψη Μια από τις πιο συνηθισμένες τεχνικές για την εισαγωγή παραλληλίας στους επιστημονικούς υπολογισμούς είναι η Διαμέριση (ορθογώνιου) Πεδίου. Στην παρούσα εργασία μοντελοποιούμε το πρόβλημα αυτό ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με πολλαπλασιαστές Lagrange και δίνουμε παραδείγματα στις 2, στις 3 και στις 4 διαστάσεις.
Αν και η διαμέριση σε τετράγωνα θεωρείται βέλτιστη για την διαμέριση ορθογώνιων πεδίων στις δύο διαστάσεις, αποδεικνύουμε ότι αυτό δεν ισχύει καθώς και ότι η βέλτιστη διαμέριση ενός ορθογώνιου πεδίου με κανονικά πολύγωνα επιτυγχάνεται με εξάγωνα.
Ως επιστημονική εφαρμογή, η οποία απαιτεί τη διαμέριση, θεωρούμε την αριθμητική επίλυση ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

1 Εισαγωγή

Οι μέχρι σήμερα προσεγγίσεις στις διαμερίσεις πεδίων είναι είτε διαισθητικές είτε βασίζονται σε πολύπλοκους συλλογισμούς και μεθόδους προκειμένου να βρεθεί μια ικανοποιητική διαμέριση ([12], [13], [19], [17], [2], [21], [3]). Φαίνεται να απουσιάζει μια ολική μοντελοποίηση οποία θα λαμβάνει υπόψη της τόσο τα χαρακτηριστικά του προς διαμέριση πεδίου, δηλαδή τις διαστάσεις του, όσο και τα χαρακτηριστικά της παράλληλης μηχανής στην οποία θα υλοποιηθεί και θα εκτελεστεί η όποια παράλληλη μέθοδος.

Στην παρούσα εργασία μοντελοποιούμε το πρόβλημα με τη χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange και εφαρμόζουμε αυτή τη μοντελοποίηση προκειμένου να επιλύσουμε παράλληλα επίλυσης μια ελλειπτική ΜΔΕ, στις δύο, στις τρεις κα στις τέσσερις διαστάσεις. Θεωρούμε ότι τα προς ολοκλήρωση πεδία είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα ή ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Τέτοια πεδία μπορούν να αναπαριστούν καταστάσεις μοντέλων καιρού, μοντέλων ωκεανών ή ακόμα και χώρους προβλημάτων επεξεργασίας εικόνας ([2], [22], [20], [11], [18], [15], [16]). Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με ανάλογα προβλήματα, ωστόσο, δεν έχει παρουσιαστεί ανάλογη μοντελοποίηση η οποία αφενός να διευκολύνει το πρόβλημα και αφετέρου να έχει γενικότητα η οποία θα της επιτρέπει να γενικεύεται σε οποιαδήποτε διάσταση και σε οποιαδήποτε μορφής πεδίο.

* Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Μισυρλής

Επιπρόσθετα, καταρίπτουμε την εικασία ότι η διαμέριση με τετράγωνα είναι βέλτιστη σε ορθογώνιο πεδίο δύο διαστάσεων αποδεικνύοντας ότι η βέλτιστη διαμέριση ορθογώνιου πεδίου με κανονικά πολύγωνα επιτυγχάνεται διαμερίζοντάς το με εξάγωνα ([12], [13],[1]).

2 Μέθοδοι Διαμέρισης Πεδίου

Οι μέθοδοι διαμέρισης πεδίου είναι τεχνικές Διαίρει και Βασίλευε για την επίλυση ΜΔΕ, οι οποίες επιλύουν υποπροβλήματα ορισμένα σε μικρότερα υποχωρία. Θεωρούμε διαμερίσεις σε δύο μόνο υποπεδία, προκειμένου να επιλύσουμε τη ΜΔΕ

$$Lu \equiv -\nabla \cdot (\alpha(x,y)\nabla u)\,, \text{in } \Omega \quad \wedge \quad u = 0, \text{on } \partial\Omega \tag{1}$$

Οι μέθοδοι διαμέρισης πεδίου χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τις *επικαλυπτόμενες* διαμερίσεις και τις *μη-επικαλυπτόμενες* διαμερίσεις. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει στα [2], [21] και [3]. Οι μη επικαλυπτόμενες διαμερίσεις είναι αυτές οι οποίες θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά στη συνέχεια της εργασίας. Οι αλγόριθμοι των μη επικαλυπτόμενων διαμερίσεων βασ΄ίζονται στη διαμέριση του πεδίου Ω σε ένα αριθμό από μη επικαλυπτόμενα χωρία, όπως φαίνεται και στο Σχήμα (1). Θεωρούμε ότι το πεδίο Ω διαμερίζεται σε δύο χωρία $\{\Omega_1, \Omega_2\}$. Επίσης, θεωρούμε ότι $B = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ είναι το σύνορο που διαχωρίζει τα δύο πεδία και έστω $u = (u_1, u_2, u_B)$ η πραγματική λύση περιορισμένη στα Ω_1, Ω_2 και B αντίστοιχα. Οι u_1 και u_2 πρέπει να ικανοποιούν τα ακόλουθα δύο τοπικά προβλήματα:

$$\begin{cases} Lu_i = f, & in\ \Omega_i \\ u_i \ \ = 0, & on\ \partial\Omega_i \backslash \Gamma_i \qquad i = 1,2 \\ u_i \ \ = u_B, & on\ B \end{cases} \tag{2}$$

Αν θεωρήσουμε τη ΜΔΕ του Laplace σε ένα ορθογώνιο πεδίο Ω, διαστάσεων $M \times N$.

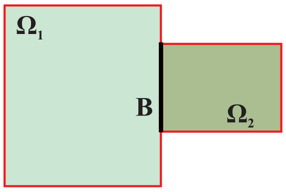
$$\nabla^2 u(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y) = 0. \tag{3}$$

Για τον υπολογισμό του κάθε σημείου θα πρέπει να είναι γνωστές οι τιμές των τεσσάρων γειτόνων του, του βόρειου, του νότιου, του ανατολικού και του δυτικού. Αυτό το υπολογιστικό μόριο των 5 σημείων φαίνεται και στο Σχήμα (3). Πιο συγκεκριμένα για την εύρεση της λύσης εφαρμόζονται επαναληπτικές μέθοδοι. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε τη μέθοδο του Jacobi για την επίλυση της εξίσωσης (3), αφού η παράλληλη SOR ανάγεται στην εφαρμογή της Jacobi ([14], [1], [13]).

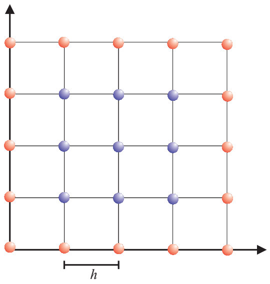
$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)}) \tag{4}$$

3 Παράλληλοι Υπολογιστές και Συμβολισμός

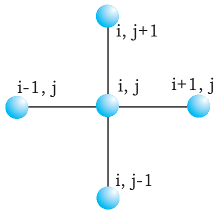
Οι παράλληλοι υπολογιστές μπορούν να χωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Στους υπολογιστές Διαμοιραζόμενης Μνήμης και στους υπολογιστές Κατανεμημένης Μνήμης ([12], [13]). Στις ενότητες που θα ακολουθήσουν θα χρησιμοποιήσουμε



Σχήμα 1. Μη Επικαλυπτόμενες Διαμερίσεις



Σχήμα 2. Διακριτοποιημένο πεδίο



Σχήμα 3. Υπολογιστικό μόριο 5 σημείων

t_s	Σταθερά μηχανής, αρχικοποίησης επικοινωνίας (start-up time).
t_w	Σταθερά μηχανής, χρόνος αποστολής μιας λέξης.
t_c	Σταθερά μηχανής, χρόνος υπολογισμού ενός σημείου.
T_{comm}	Συνολικός χρόνος επικοινωνίας ενός επεξεργαστή με τους γείτονές του.
T_{calc}	Συνολικός χρόνος υπολογισμού ενός επεξεργαστή.
T_p	Συνολικός παράλληλος χρόνος.
r	Λόγος χρόνου επικοινωνίας προς χρόνο υπολογισμού
p	Ο αριθμός των επεξεργαστών.

Πίνακας 1. Βασικός Συμβολισμός

το συμβολισμό που φαίνεται στον Πίνακα (1). Επίσης όταν αναφέρεται ο λόγος θα εννοούμε το λόγο του χρόνου επικοινωνίας προς το χρόνο υπολογισμού.

4 Πολλαπλασιαστές Lagrange

Έστω συνάρτηση $f = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, n μεταβλητών $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Αν οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες τότε το ολικό ελάχιστο της f μπορεί να βρεθεί από τη λύση n εξισώσεων

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{5}$$

Γενικά οι παραπάνω εξισώσεις ορίζουν ένα ακρότατο της f (ελάχιστο, μέγιστο, σαγματικό σημείο). Αν οι μεταβλητές δεν είναι ανεξάρτητες αλλά πρέπει να ικανοποιούν m περιορισμούς

$$c_1(x) = c_2(x) = \ldots = c_m(x) = 0 \tag{6}$$

τότε το ∇f δεν είναι απαραίτητο να μηδενίζεται σε ακρότατο, αλλά δύναται να είναι ορθογώνιο σε μια επιφάνεια διάστασης $n - m$, η οποία περιγράφεται από τους περιορισμούς, δηλαδή,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \; j = 1, \ldots, n \tag{7}$$

ή χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων $\nabla f = \lambda^T \nabla c$, όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange. Όλες μαζί οι εξισώσεις γράφονται

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial \lambda_m} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \tag{8}$$

όπου

$$\begin{aligned} F &= F(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, x_1, \ldots, x_n) \\ &= f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda^T c_i(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Το μη γραμμικό σύστημα (8) μπορεί να επιλυθεί με πολλούς τρόπους, είτε με αριθμητικές μεθόδους, όπως Newton-Raphson είτε με μεθόδους απαλοιφής, όπως με βάσεις Groebner ή με τη χρήση αραιής απαλοίφουσας ([8], [9]). Στις ενότητες που ακολουθούν θα μοντελοποιήσουμε τη διαμέριση πεδίου ως ένα πρόβλημα με πολλαπλασιαστές Lagrange και στη συνέχεια θα το επιλύσουμε συμβολικά.

5 Διαμερίσεις με πολλαπλασιαστές Lagrange

Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα της διαμέρισης ως ένα πρόβλημα πολλαπλασιαστών Lagrange.

Θεωρούμε ότι το προς διαμέριση πεδίο είναι σε n-διαστάσεις. Στη γενική του μορφή το πρόβλημα είναι

$$\begin{aligned} \min T_{comm}(q_1, \ldots q_n) \\ T_{calc}(q_1, \ldots q_n) = constant \end{aligned} \tag{9}$$

όπου $q_1, \ldots, q_n$ είναι οι διαμερίσεις σε κάθε διάσταση. Είναι προφανές ότι η παραπάνω μοντελοποίηση μπορεί να παραχθεί για οποιοδήποτε πεδίο και για οποιοδήποτε είδος διαμέρισης. Η ανάδειξη του ελάχιστου ή του μέγιστου γίνεται με τη χρήση του Εσσιανού πίνακα.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την εφαρμογή της παραπάνω μοντελοποίησης στις 2, στις 3 και τις 4 διαστάσεις. Θεωρούμε ότι το πλήθος των επεξεργαστών είναι πολύ μεγάλο, αν αυτό δεν συμβαίνει τότε θα πρέπει να γίνει ανάλυση του λόγου προκειμένου να αποφασίσουμε τη βέλτιστη διαμέριση.

Ορθογώνιες διαμερίσεις Θεωρούμε διαμέριση του πεδίου Ω, διαστάσεων $M \times N$, σχήματα (4) και(5). Ο αναγνώστης ο οποίος επιθυμεί μια πιο λεπτομερή περιγραφή και πειραματικά αποτελέσματα καλείται να ανατρέξει στο [10]. Ζητάμε να ελαχιστοποιήσουμε την επικοινωνία μεταξύ των παράλληλων επεξεργαστών. Αν θεωρήσουμε ότι οι διαστάσεις του ορθογώνιου που έχει ανατεθεί σε κάθε επεξεργαστή είναι q_1, και q_2 τότε ο χρόνος επικοινωνίας δίνεται από τη σχέση

$$T_{comm}(q_1, q_2) = 4t_s + 2(q_1 + q_2)t_w \tag{10}$$

Ο περιορισμός μας είναι ότι πρέπει να ανατεθεί σε κάθε επεξεργαστή ένα σταθερό εμβαδό, το οποίο να είναι ίσο με το πηλίκο του συνολικού εμβαδού του πεδίου δια του πλήθους των επεξεργαστών, δηλαδή

$$c(q_1, q_2) = q_1 q_2 - \frac{MN}{p} \tag{11}$$

Κατά συνέπεια πρέπει να επιλύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \min T_{comm}(q_1, q_2) \\ g(q_1, q_2) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

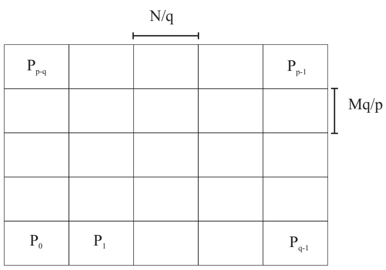
Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, δηλαδή

$$\begin{aligned} \nabla T_{comm}(q_1, q_2) &= \lambda \nabla g(q_1, q_2) \\ g(q_1, q_2) \qquad &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

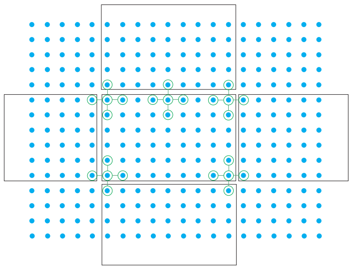
Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων προκύπτει ότι

$$q_1 = q_2 = \sqrt{\frac{MN}{p}} \tag{14}$$

Χρησιμοποιώντας τον Εσσιανό πίνακα μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η παραπάνω τιμή είναι ελάχιστη.



Σχήμα 4. Ορθογώνια διαμέριση πεδίου



Σχήμα 5. Επικοινωνία στην ορθογώνια διαμέριση πεδίου

Διαμερίσεις στο χώρο Θεωρούμε ότι το πεδίο Ω, το οποίο πρέπει να διαμεριστεί, είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, διαστάσεων $L \times M \times N$.

Θεωρούμε ότι οι διαστάσεις του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου που έχει ανατεθεί σε κάθε επεξεργαστή είναι q_1, q_2 και q_3, οπότε ο χρόνος επικοινωνίας δίνεται από τη σχέση

$$T_{comm}(q_1, q_2, q_3) = 6t_s + 2(q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_1 q_3) t_w \tag{15}$$

Ο περιορισμός μας είναι ότι πρέπει να ανατεθεί σε κάθε επεξεργαστή ένας σταθερός όγκος, οποίος είναι ίσος με το πηλίκο του συνολικού όγκου δια του πλήθους των επεξεργαστών, δηλαδή

$$g(q_1, q_2, q_3) = q_1 q_2 q_3 - \frac{LMN}{p} \tag{16}$$

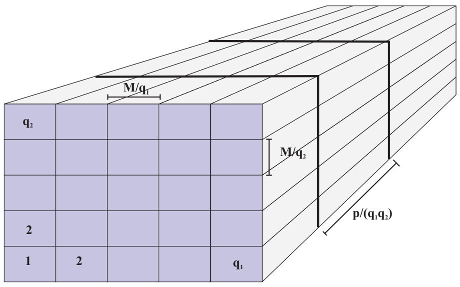
Κατά συνέπεια πρέπει να επιλύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \min f(q_1, q_2, q_3) \\ g(q_1, q_2, q_3) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

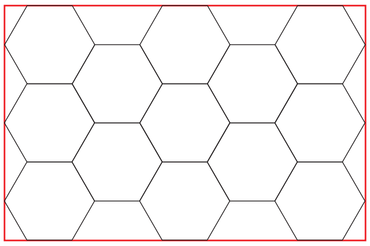
Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange προκύπτει ότι

$$q_1 = q_2 = q_3 = \sqrt[3]{\frac{LMN}{p}} \tag{18}$$

Ένα παράδειγμα διαμέρισης στις 3 διαστάσεις, φαίνεται στο Σχήμα (6).



Σχήμα 6. Διαμέριση στις 3 διαστάσεις



Σχήμα 7. Διαμέριση με κανονικά εξάγωνα

Διαμερίσεις στις 4 διαστάσεις Θεωρούμε ότι το πεδίο Ω, το οποίο πρέπει να διαμεριστεί, είναι διαστάσεων $K \times L \times M \times N$. Θεωρούμε ότι οι διαστάσεις των πεδίων που έχουν ανατεθεί σε κάθε επεξεργαστή είναι q_1, q_2, q_3 και q_4 οπότε ο χρόνος επικοινωνίας δίνεται από τη σχέση

$$T_{comm}(q_1, q_2, q_3, q_4) = 8t_s + 2(q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_4 + q_1 q_3 q_4 + q_2 q_3 q_4)t_w \tag{19}$$

Ο περιορισμός μας είναι ότι πρέπει να ανατεθεί σε κάθε επεξεργαστή ένας σταθερός όγκος, οποίος είναι ίσος με το πηλίκο του συνολικού όγκου δια του πλήθους των επεξεργαστών, δηλαδή

$$g(q_1, q_2, q_3, q_4) = q_1 q_2 q_3 q_4 - \frac{KLMN}{p} \tag{20}$$

Κατά συνέπεια πρέπει να επιλύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \min f(q_1, q_2, q_3, q_4) \\ g(q_1, q_2, q_3, q_4) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange προκύπτει ότι

$$q_1 = q_2 = q_3 = q4 = \sqrt[4]{\frac{KLMN}{p}} \tag{22}$$

6 Κανονικές Διαμερίσεις στο Επίπεδο

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλύσουμε διαμερίσεις στο επίπεδο με τη χρήση κανονικών πολυγώνων. Είναι γνωστό ότι τα μόνα κανονικά πολύγωνα τα οποία καλύπτουν το επίπεδο είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το εξάγωνο. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η διαμέριση που στηρίζεται σε ισόπλευρα τρίγωνα είναι αδιάφορη για τη ανάλυσή μας. Στο [10] μελετήσαμε το τετράγωνο και στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουεμ το εξάγωνο.

Κάλυψη Πεδίου με Εξάγωνα Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο πεδίο Ω διαστάσεων $M \times N$ και ότι ο αριθμός των επεξεργαστών του παράλληλου υπολογιστή είναι p. Θεωρούμε ότι η πλευρά και η ακτίνα του κανονικού εξαγώνου είναι R. Επιλέγουμε να τοποθετήσουμε τα εξάγωνα με τέτοιο τρόπο ώστε στην αριστερή και δεξιά άκρη του πεδίου να εμφανίζονται τρίγωνα τα οποία μπορούμε να εύκολα να υπολογίσουμε ότι είναι είτε το $\frac{1}{6}$ είτε το $\frac{1}{12}$ του εξαγώνου. Απαιτούμε το πλήθος αυτών των τριγώνων σε κάθε πλευρά να είναι πολλαπλάσιο του 3, έτσι ώστε το άθροισμά του να σχηματίζει ένα κανονικό εξάγωνο. Επίσης στο πάνω και κάτω άκρο του πεδίου σχηματίζονται μισά εξάγωνα. Απαιτούμε να εμφανίζονται τέτοια μισά εξάγωνα και κανένα άλλο μερικό τμήμα του εξαγώνου.

Εν κατακλείδει, απαιτούμε η κάλυψη του πεδίου με εξάγωνα να είναι τέτοια ώστε στο αριστερό και στο δεξί άκρο να εμφανίζονται τρίγωνα που να είναι το $\frac{1}{6}$ είτε το $\frac{1}{12}$ του εξαγώνου και στο πάνω και στο κάτω άκρο να εμφανίζονται μισά εξάγωνα και τίποτε άλλο.

Τα παραπάνω μπορούμε εύκολα να τα περιγράψουμε με τις παρακάτω εξισώσεις:

$$M = 3m\sqrt{3}R \quad \text{και} \quad N = \left(\frac{7}{2} + n\frac{3}{2}\right) = \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(n+2)\right]R \tag{23}$$

Είναι σαφές ότι ότι οι διαστάσεις M και N του πεδίου πρέπει να ικανοποιούν τις παραπάνω εξισώσεις για κάποια m και n με $m, n \in \mathbb{N}$ και για δεδομένη ακτίνα R των κανονικών εξαγώνων. Επίσης, από τις εξισώσεις (23) μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι το πλήθος των επεξεργαστών πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$p = 3m(n+2) + m = m(3n+7) \tag{24}$$

Στο Σχήμα (7) μπορούμε να δούμε ένα παράδειγμα κάλυψης ενός ορθογώνιου πεδίου με κανονικά εξάγωνα ακτίνας R, όπου $m = 1$ και $n = 3$ και συνεπώς οι διαστάσεις του πεδίου είναι $M = 3\sqrt{3}R$ και $N = 8R$.

Ανάλυση της Διαμέρισης με Εξάγωνα Ο κάθε επεξεργαστής έχει φορτίο υπολογισμού ίσο με το εμβαδόν ενός κανονικού εξαγώνου ακτίνας R και έχει έξι γείτονες. Θεωρούμε ότι η φυσική τοπολογία των παράλληλων επεξεργαστών είναι υπερκύβος διάστασης τουλάχιστον 6.

Έχοντας υπόψιν τις παραπάνω επισημάνσεις μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι ο χρόνος υπολογισμού είναι ανάλογος του εμβαδού του εξαγώνου, δηλαδή

$$T_{calc}^{hex} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 t_c \tag{25}$$

και ότι ο χρόνος επικοινωνίας είναι ανάλογος της περιμέτρου, δηλαδή

$$T_{comm}^{hex} = 6t_s + 6Rt_w \tag{26}$$

Κατά συνέπεια ο συνολικός παράλληλος χρόνος και ο λόγος είναι

$$T_p^{hex} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 t_c + 6t_s + 6Rt_w \quad \text{και} \quad r^{hex} = \frac{T_{comm}^{hex}}{T_{calc}^{hex}} = \frac{6t_s + 6Rt_w}{\frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 t_c} \tag{27}$$

Ανάλογα η επιτάχυνση και η αποδοτικότητα δίνονται από τις σχέσεις

$$S_p^{hex} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} m(3n+7) R^2 t_c}{\frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 t_c + 6t_s + 6Rt_w} \tag{28}$$

$$E_p^{hex} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 t_c}{\frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 t_c + 6t_s + 6Rt_w} \tag{29}$$

Από τις εξισώσεις (28) και (29) παρατηρούμε ότι αν $R \gg 1$ τότε, για *οποιοδήποτε* ορθογώνιο χωρίο

$$S_p^{hex} = p, \; E_p^{hex} = 1 \tag{30}$$

δηλαδή, η διαμέριση με κανονικά εξάγωνα είναι ασυμπτωτικά *βέλτιστη*!

Προσδιορισμός της Ακτίνας Στην ανάλυση που προηγήθηκε θεωρήσαμε δεδομένη την ακτίνα των κανονικών εξαγώνων και προσδιορίσαμε τις σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι διαστάσεις του πεδίου και ο αριθμός των επεξεργαστών. Κυρίως μας ενδιαφέρει η αντίστροφη διαδικασία!

Έστω ένα ορθογώνιο πεδίο Ω, διαστάσεων $M \times N$ και έστω ότι το πλήθος των παράλληλων επεξεργαστών είναι p. Προκειμένου να είναι εφικτή η κάλυψη του πεδίου με κανονικά εξάγωνα θα πρέπει το παρακάτω σύστημα, με άγνωστους τα m, n και R να έχει λύση

$$\begin{cases} M = 3m\sqrt{3}R \\ N = \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(n+2)\right] R \\ p = 3m(n+2) + m = m(3n+7). \end{cases} \tag{31}$$

Το σύστημα (31) επιλύεται και μάλιστα

$$R = \sqrt{\frac{2MN}{3\sqrt{3}p}}. \tag{32}$$

Κατά συνέπεια, μπορούμε να καλύψουμε ένα ορθογώνιο πεδίο με κανονικά εξάγωνα, σύμφωνα με τη μεθεδολογία που περιγράψαμε προηγούμενως και η ακτίνα τους δίδεται από την εξίσωση (32).

Εφόσον η ακτίνα των κανονικών εξαγώνων μπορεί υπολογιστεί, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την τιμή του R στις εξισώσεις (25) και (26), δηλαδή

$$T^{hex}_{calc} = \frac{MN}{p}t_c \quad \text{και} \quad T^{hex}_{comm} = 6t_s + 6\sqrt{\frac{2MN}{3\sqrt{3}p}}t_w \tag{33}$$

Σύγκριση με άλλες διαμερίσεις Παρατηρούμε ότι ο χρόνος υπολογισμού στη διαμέριση με κανονικά εξάγωνα είναι ίσος με το χρόνο υπολογισμού των διαμερίσεων με ορθογώνια, όπως και αναμενόταν. Κατά συνέπεια, προκειμένου να συγκρίνουμε τη διαμέριση με κανονικά εξάγωνα με την ορθογώνια αρκεί να συγκρίνουμε τους χρόνους επικοινωνίας.

Ο χρόνος επικοινωνίας στην ορθογώνια διαμέριση είναι

$$T^{rect}_{comm} = 2\left[2t_s + \left(\frac{N}{q} + \frac{Mq}{p}t_w\right)\right]. \tag{34}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (33) και (34) έχουμε

$$T^{hex}_{comm} - T^{rect}_{comm} = 2t_s + \left[6\sqrt{\frac{2MN}{3\sqrt{3}p}}t_w - 4\sqrt{\frac{MN}{p}}\right]t_w \tag{35}$$

Το δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι πάντοτε θετικό όπότε $T^{hex}_{comm} > T^{rect}_{comm}$. Είναι προφανές ότι $\forall p, M, N$ η διαμέριση με κανονικά εξάγωνα είναι καλύτερη από τη διαμέριση ορθογώνια.

7 Συμπεράσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις

Στη παρούσα εργασία κατηγοριοποιήσαμε τις διαμερίσεις πεδίου τόσο στις δύο όσο και στις τρεις διαστάσεις. Η βασική ιδέα πίσω από όλες τις αναλύσεις είναι το γεγονός ότι θεωρήσαμε τα προς διαμέριση πεδία συνεχή προκειμένου να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των πολλπλασιαστών Lagrange και στη συνέχεια τα θεωρήσαμε ως ένα σύνολο σημείων τα οποίο πρέπει να διαμοιραστεί.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις διαμερίσεις με κανονικά εξάγωνα αποδείξαμε ότι αυτές οι διαμερίσεις είναι βέλτιστες κάτω από την προϋπόθεση ότι ο αριθμός των παράλληλων επεξεργαστών είναι αρκετά μεγάλος. Αξίζει να τονίσουμε ότι η διαμέριση με κανονικά εξάγωνα είναι η βέλτιστη ανάμεσα σε όλες τις δυνατές διαμερίσεις με κανονικά πολύγωνα στο επίπεδο.

Είναι γεγονός, ότι παρόλο που η διαμέριση με κανονικά εξάγωνα είναι βέλτιστη, ο προγραμματισμός με βάση αυτή τη διαμέριση είναι αρκετά πολύπλοκος. Προκειμένου να διευκολυνθεί ο προγραμματιστής που θα κληθεί να υλοποιήσει μια τέτοια διαμέριση, προτείνουμε τη χρήση της τεχνολογίας $ENSEMBLE$ ([4], [5], [6], [7],) προκειμένου να υλοποιηθούν εύκολα προγράμματα $MIMD$ και να απλοποιηθούν οι σχέσεις επικοινωνίας μεταξύ των παράλληλων επεξεργαστών.

Η θεωρητική ανάλυση στις τρεις διαστάσεις με κανένα τρόπο δεν πρέπει να θεωρηθεί πλήρης. Πρέπει να συμπληρωθεί με διαμερίσεις που θα βασίζονται και σε άλλα γεωμετρικά σχήματα που θα καλύπτουν το χώρο όπως το πρισματικό εξάγωνο. Αξίζει να τονίσουμε ότι κανένα από τα πλατωνικά στερεά, τα οποία είναι αντίστοιχα των κανονικών πολυγώνων στις τρεις διαστάσεις, δεν καλύπτει το χώρο εκτός από τον κύβο.

Μια επίσης φυσική προέκταση της παρούσας εργασία είναι οι διαμερίσεις σε χώρους $n-$διαστάσεων. Ωστόσο, η επέκταση αυτή είναι αρκετά δύσκολη καθώς της λείπει η φυσική αναπαράσταση και η γεωμετρία τέτοιων χώρων είναι αρκετά πολύπλοκη. Βέβαια, μια ανάλυση διαμερίσεων οφείλει να κινηθεί και προς σε αυτή την κατεύθυνση προκειμένου να θεωρηθεί πλήρης.

Αναφορές

1. L.A. Boukas and N.M. Missirlis. Parallel iterative methods for solving partial differential equations on distributed memory processors. In K. Lagouvardos ProceedingsG.L. Kallos, V. Kotroni, editor, *Proceedings of the Symposium on Regional Weather Prediction On Parallel Computer Environments*, pages 123–136, Athens, 1997.
2. KeyesD Melvin R Young D Cai X, Gropp W. Parallel newton-krylov-schwartz algorithms for the transonic full pontetial equation. *SIAM J. ScientificComputing*, (19):246–265, 1998.
3. Mathew T Chan T. Domain decomposition algorithms. *Acta Numerica*, pages 61–143, 1994.
4. J.Y. Cotronis. Efficient program composition on parix by the ensemble methodology. In Milligan and Kuchinsky, editors, *Proceedings of the 22nd EuroMicro Conference*. IEEE Computer Society Press, 1996.
5. J.Y. Cotronis. Message passing program development by ensemble. In *PVM-MPI 97*, 1997.
6. J.Y. Cotronis. Efficient developing message passing applications on mpich under ensemble. In *PVM/MPI 98 Workshop*, 1998.
7. J.Y. Cotronis. Reusable message passing components. In *Proceedings 8th PDP2000 Euromicro Workshop on Parallel and Distributed Processing*, pages 398–405. IEEE Computer Society Press, 2002.
8. D. Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1997.
9. D. Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Using Algebraic Geometry*. Number 185 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998.
10. Tsigaridas Elias. The impact of different domain decompositions methods to parallel solytion of a alliptic pde. Master's thesis, Department of Informatics and Telecommunications, University of Athens, October 2002.

11. D. Jovic O. Kakaliagou A. Papadopoulos N. Missirlis L.A. Boukas G.L. Kallos, S. Nickovic and N. Mimikou. The eta model operational forecasting system and its parallel implementation. In S.D. Mergenov P.S. Vassilevski M. Griebel, O.P. Iliev, editor, *Proceedings of the First Workshop on Large-Scale Scientific Computations*, volume 62, pages 176–188, 1997.
12. Foster Ian. *Designing and building parallel programs*. Addisson-Wesley, 1994.
13. Ortega J. *Introduction to parallel and vector solution of linear systems*. Plenum, 1989.
14. N.M. Missirlis L.A. Boukas. A parallel local modified sor for nonsymmetric linear systems. *Intern. J. of Comput. Math.*, (68):153–174, 1998.
15. N.M. Missirlis L.A. Boukas, N.Th. Mimikou and G. Kallos. The regional weather forecasting system skiron: Parallel implementation of the eta model. In W. Zwieflhofer and ECMWF R. Kreitz, editors, *Proceedings of the Eight ECMWF Workshop on the use of Parallel Processors in Meteorology*, volume 2, pages 369–389, UK, 1999. World Scientific.
16. N.M. Missirlis G.L. Mellor A. Laskaratos L.A. Boukas, N.Th. Mimikou and G. Korres. The parallelisation of the princeton ocean model. In M. Dayde' I. Duff V. Fraysse' L. Giraud D. Ruiz P. Amestoy, P. Berger, editor, *Europar "99 Parallel Processing*, Lecture Notes in Computer Science, pages 1395–1402, Toulouse, France, 1999. Springer.
17. N.M. Missirlis G.L.Mellor A. Laskaratos L.A. Boukas, N.Th. Mimikou and G. Korres. A first approach towards the parallelization of the princeton ocean model. In *International Conference Coastal and Ocean Modelling*, Valletta, Malta, 1998.
18. N.Th. Mimikou L.A. Boukas and N.M. Missirlis. A parallel implementation of the eta model. In V. Kotroni K. Lagouvardos G.L Kallos, editor, *Proceedings of the Symposium on Regional Weather Prediction On Parallel Computer Environments*, pages 123–136, Athens, 1997.
19. N.Th. Mimikou L.A. Boukas and N.M. Missirlis. A parallel implementation of the eta model. *Intern. J. of Parallel and Distributed Systems and Networks*, 1(2):57–64, 1998.
20. N.Th. Mimikou N.M. Missirlis N. Argyropoulos, L.A. Boukas and J.G. Papageorgiou. A distributed implementation of the numerical weather prediction eta model. In *Proceedings of the IASTED Conference on Parallel and Distributed Computing and Networks*, pages 301–304. IASTED/Acta Press, 1997.
21. Gropp W Smith B, Bjorstad P. Domain decomposition: Parallel multilevel methods for eliptec partial differential equations. *Cambridge University Press*, 1996.
22. Williams T. 3d gyrokinetic particle-in-cell simulation of fusion plasma microturbulence on parallel computers. *High Performance Computing*, 1993.