Notes de cours

14 février 2024

1 fusion de colonnes et inertie

On veut montrer

$$\frac{n}{n_{.j}}\left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j}}{n}\right)^2+\frac{n}{n_{.j'}}\left(\frac{n_{ij'}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j'}}{n}\right)^2$$
$$=\frac{n}{n_{.j}+n_{.j'}}\left(\frac{n_{ij}+n_{ij'}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j}+n_{.j'}}{n}\right)^2$$

On écrit

$$\begin{aligned}\left(\frac{n_{ij}+n_{ij'}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j}+n_{.j'}}{n}\right)^2&=\left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j}}{n}+\frac{n_{ij'}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j'}}{n}\right)^2\\&=\left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j}}{n}\right)^2+\left(\frac{n_{ij'}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j'}}{n}\right)^2+2\left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j}}{n}\right)\left(\frac{n_{ij'}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j'}}{n}\right)\end{aligned}$$

et de plus, comme $n_{ij}=n_{ij'}n_{.j}/n_{.j'}$,

$$\begin{aligned}2\left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j}}{n}\right)\left(\frac{n_{ij'}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j'}}{n}\right)&=\left(\frac{n_{ij'}}{n_{i.}}\frac{n_{.j}}{n_{.j'}}-\frac{n_{.j}}{n}\right)\left(\frac{n_{ij'}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j'}}{n}\right)+\left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j}}{n}\right)\left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}\frac{n_{.j'}}{n_{.j}}-\frac{n_{.j'}}{n}\right)\\&=\frac{n_{.j}}{n_{.j'}}\left(\frac{n_{ij'}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j'}}{n}\right)^2+\frac{n_{.j'}}{n_{.j}}\left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j}}{n}\right)^2\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\frac{n}{n_{.j}+n_{.j'}}\left(\frac{n_{ij}+n_{ij'}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j}+n_{.j'}}{n}\right)^2&=\frac{n}{n_{.j}+n_{.j'}}\left[\left(1+\frac{n_{.j}}{n_{.j'}}\right)\left(\frac{n_{ij'}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j'}}{n}\right)^2+\left(1+\frac{n_{.j'}}{n_{.j}}\right)\left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j}}{n}\right)^2\right]\\&=\frac{n}{n_{.j}}\left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j}}{n}\right)^2+\frac{n}{n_{.j'}}\left(\frac{n_{ij'}}{n_{i.}}-\frac{n_{.j'}}{n}\right)^2\end{aligned}$$

2 formules barycentriques

Comme $\mathbf{a}_k$ est (à une normalisation près) le facteur principal associé à $\mathbf{b}_k$, on sait que $\mathbf{b}_k = \alpha \mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{a}_k$. On écrit alors

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_k' \frac{\mathbf{D}_2}{n}\mathbf{b}_k = \lambda_k = \alpha^2 \mathbf{a}_k'\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\frac{\mathbf{D}_2}{n}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{a}_k = \frac{\alpha^2}{n}\mathbf{a}_k'\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{a}_k \\ = \alpha^2 \mathbf{a}_k'\frac{\mathbf{D}_1}{n}\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{a}_k = \lambda_k \alpha^2 \mathbf{a}_k'\frac{\mathbf{D}_1}{n}\mathbf{a}_k = \lambda_k^2\alpha^2\end{aligned}$$

On obtient donc $\lambda_k = \lambda_k^2\alpha^2$, d'où $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$.