Introduction à la biologie mathématique
(Physiologie et biotechnologies : modélisation en biomédical)
Contrôle des connaissances du 26 janvier 2011 (durée : 1 heure)

Exercice I. (12 pts.) *Renards et lapins.* On représente par le système suivant l'évolution d'un système prédateurs-proies, par exemple de renards et de lapins :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & x(1-x-ay) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} & = & y(-\mu+bx) \end{cases}$$

Dans ce système, x représente la densité de population des lapins, normalisée à 1, supposé être la capacité maximale d'accueil des lapins dans leur environnement (finitude des pieds de serpolet et de salsepareille), et y la densité de population des renards ; μ est le taux de mort des renards qui, carnivores, ne peuvent survivre sans manger des lapins ; ay est le taux de prédation des lapins x par les renards y, et bx le taux de croissance de la population des renards y quand ils mangent des lapins x.

On suppose $\mu > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, et $0 < x_0 = x(0) < 1, y_0 = y(0) > 0$.

Montrer que si $b = 0$ (renards en paix avec les lapins), la population des renards s'éteint et celle des lapins arrive à saturation ($x = 1$).

On suppose désormais $b > 0$ et $a > 0$ (des renards mangent des lapins). Montrer que les conditions initiales en x et y impliquent que $\forall t \geq 0, 0 < x(t) \leq 1$ et $y(t) \geq 0$ (on pourra raisonner par l'absurde ou admettre ce résultat pour passer à la suite).

Vérifier que :

– $(0, 0)$ est toujours un point fixe instable du système.

– Si $b > \mu$, $(1, 0)$ est un point fixe instable, et il y a un autre point fixe qu'on déterminera, et qui est stable.

– Si $b < \mu$, il y a en dehors de l'origine un seul point fixe, $(1, 0)$, et il est stable.

– Si $b = \mu$, par coalescence des deux cas précédents, en passant à la limite pour $b \to \mu$, il y a en dehors de l'origine un seul point fixe, $(1, 0)$, et il est stable ; mais on ne peut pas conclure directement sur la stabilité de ce point fixe par l'examen de la jacobienne du système linéarisé tangent : pourquoi ?

Interpréter écologiquement ces résultats. On remarquera que le coefficient a de mortalité des lapins par prédation des renards ne joue qu'un rôle mineur dans ce scénario ; que les lapins ne sont jamais en danger de disparaître ; qu'en revanche les renards sont une espèce menacée : si μ l'emporte sur b (par augmentation de μ : chasse, rage ; ou par baisse de b : meilleure protection des lapins), les renards disparaissent ; mais que si $\mu < b$, l'écosystème renards-lapins atteint un équilibre : cet équilibre est-il un foyer stable ou un nœud stable ? (réponse : ça dépend ; préciser).

.../...

Exercice II. (8 pts.) *Un cycle limite circulaire.* On donne le système plan :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -x + ay(1 - x^2 - y^2) \end{array} \right.$$

– Montrer que l'origine est le seul point fixe de ce système et qu'elle est stable pour $a < 0$, et instable pour $a > 0$.

– Passer en coordonnées polaires et montrer que le cercle unité parcouru à vitesse angulaire -1 est pour tout a une orbite périodique du système.

– Montrer que lorsque $a > 0$, la couronne $1 - \varepsilon < r^2 < 1 + \varepsilon$ est pour tout $\varepsilon > 0$, aussi petit qu'on veut, une région de confinement pour le flot ; en déduire à l'aide du théorème de Poincaré-Bendixson que pour $a > 0$, le cercle-unité est un cycle limite stable du système.

– Lorsque $a < 0$, le même raisonnement montre que la même couronne est une région à flux toujours sortant : en déduire, en inversant le sens du temps (de 0 à $-\infty$) que pour $a < 0$ le cercle-unité est un cycle limite instable du système.

– Pour $a = 0$, le système se réduit à l'oscillateur harmonique, qui n'est pas un cycle limite : ni un cycle limite stable ni un cycle limite instable car les trajectoires sont tous les cercles de rayon $r^2 = x_0^2 + y_0^2$, qui ne sont pas isolées.

– On n'est donc pas en présence d'une bifurcation de Hopf classique, ni surcritique, ni sous-critique, alors que pourtant on peut vérifier que les valeurs propres de la jacobienne traversent transversalement l'axe imaginaire pour $a = 0$. En fait dans les cas classiques de bifurcation de Hopf (ceux du cours), il faut rajouter au théorème de Hopf pour qu'il soit valable l'hypothèse que l'origine est aussi pour $a = 0$ un point fixe stable - ce qui n'est pas le cas ici, où il y a plutôt bifurcation transcritique de cycles ($r = 0$ et $r = 1$), avec l'origine qui n'est pas un point fixe stable.

– Montrer qu'il ne peut y avoir d'autre orbite périodique que le cercle-unité. On pourra raisonner par l'absurde à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz (deux trajectoires distinctes ne se rencontrent jamais) sur le système exprimé en coordonnées polaires, pour montrer d'abord que si $r_0 < 1$, alors $\forall t \geq 0, r(t) < 1$ et de même si $r_0 > 1$, alors $\forall t \geq 0, r(t) > 1$; puis en intégrant $r\dfrac{dr}{dt}$ sur une période et sur une hypothétique orbite périodique distincte du cercle-unité (ce qui doit donner 0) , obtenir une contradiction.

– Tracer le diagramme de bifurcation du système dans le plan (a, r).