Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines — le 21 / 09 / 2023
Université Paris Saclay — Groupe de TD 3

Master 1 Informatique 2023–2024
Compléments de maths

Corrigé du CC1 - TD3

Question :

Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Réponse :

Pour tout $n \geq 1$, notons $P(n)$ la proposition $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Initialisation (Puisque l'on cherche à montrer $P(n)$ pour tout $n \geq 1$, notre initialisation correspond au cas $n = 1$.) On observe d'une part que $\sum_{i=1}^{1} = 1^3 = 1$ et d'autre part $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$. Ainsi la proposition $P(1)$ est vraie.

Hérédité (Il s'agit de démontrer pour tout $n \geq 1$ la proposition suivante : $P(n) \implies P(n+1)$, autrement dit : "**si** $P(n)$ est vérifiée **alors** $P(n+1)$ l'est aussi".)

Soit $n \geq 1$. Supposons que la proposition $P(n)$ est vérifiée.

Tout d'abord, $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i^3\right) + (n+1)^3$. D'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$ est vérifiée donc, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, ainsi :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}.$$

On a donc prouvé l'égalité $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$, autrement dit $P(n+1)$ est vérifiée.

Conclusion D'après le cas d'initialisation et la preuve d'hérédité, la proposition $P(n)$ est vérifiée pour tout $n \geq 1$.