

Bonjour !

$\square f$ non conformes

$$(P) \quad \begin{array}{ll} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}$$

$$(FF) \quad u \in \underline{H_0^1(\Omega)} \quad (u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\underline{V_h^{nc}} := \{v_h \in \underline{P_p(\bar{T}_h)}; \quad \underbrace{\langle \nabla v_h, \mathbf{d}, q_h \rangle_F = 0}_{\text{saut}} \quad \forall q_h \in \underline{P_{p-1}(\bar{T})} \quad \forall \bar{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h \}$$

$$(\bar{\Gamma} = N(C)) \quad \mu_h \in V_h^{nc} \quad \text{f.g.}$$

$$(\nabla_h \mu_h, \mathbf{d}_h \nu_h) = (\rho, \tau_h) \quad \forall \tau_h \in V_h^{nc}$$

$$\int_{\Omega} f(x) N_i(x) dx$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mu(x) \cdot \mathbf{d}_h(\tau_h) dx$$

$$V_h^{nc} \not\subset H_0^1(\Omega) \quad \dots \quad \underline{\text{non conformité}}$$

$$\text{distance de } V_h^{nc} \text{ à } H_0^1(\Omega)$$

non conforme

Thm 1.7.1

$$\|\nabla_h(\mu - \mu_h)\|^2 = \min_{v_h \in V_h^{nc}} \underbrace{\|\nabla(\mu - v_h)\|^2}_{\text{①}} + \underbrace{\left[\max_{v_h \in V_h^{nc}} \frac{(\rho, v_h) - (\mu, \mathbf{d}_h v_h)}{\|\nabla_h v_h\|} \right]^2}_{\text{②}}$$

Rem 1.7.2 $\bar{\Gamma} = \text{conformes}$:

$$\|\nabla(\mu - \underline{\mu_h})\|^2 = \min_{v_h \in V_h} \|\nabla(\mu - v_h)\|^2$$

projection

$$z_h \in V_{h,p}^{nc} \quad (\nabla_h z_h, \nabla_h v_h) = (\nabla u, \nabla_h v_h) \quad \forall v_h \in V_{h,p}^{nc}$$

la projection de la sf faible u sur $V_{h,p}^{nc}$

$z_h \neq u_h$

$v_h \in V_{h,p}^{nc}$ arbitraire

(Py)

$$\| \nabla_h (u - v_h) \|^2 = \| \nabla_h (u - z_h + z_h - v_h) \|^2$$

$$= \| \nabla_h (u - z_h) \|^2 + \| \nabla_h (z_h - v_h) \|^2 + 2 (\nabla_h (u - z_h), \nabla_h (z_h - v_h))$$

$\Rightarrow$

$$\| \nabla_h (u - z_h) \|^2 = \| \nabla_h (u - v_h) \|^2 - \| \nabla_h (z_h - v_h) \|^2$$

$$\leq \| \nabla_h (u - v_h) \|^2 \quad \forall v_h \in V_{h,p}^{nc}$$

z_h est plus proche de u que tout $v_h \in V_{h,p}^{nc} \Rightarrow$

$$\| \nabla_h (u - z_h) \|^2 = \min_{v_h \in V_{h,p}^{nc}} \| \nabla_h (u - v_h) \|^2$$

$$\textcircled{2} = \left[\max_{V_h \in V_h^{nc}} \frac{(\nabla u, \nabla_h V_h) - (f, V_h)}{\|\nabla_h V_h\|} \right]^2$$

Si $V_h^{nc} \subset H_0^1(\Omega)$ (vrai pour $d=1$), alors
 $\Rightarrow \textcircled{2} = 0$

analyse du $\textcircled{1}$

on va introduire un opérateur d'interpolation
 de $H_0^1(\Omega)$ à V_h^{nc} (section 16.2) $P=1 \downarrow$

$$I_1^{nc} : H_{\Gamma}^1(\bar{\Omega}) \rightarrow V_{h,P}^{nc} \subset V_h^{nc}$$

$$\textcircled{1} = \min_{V_h \in V_h^{nc}} \|\nabla(u - V_h)\|^2 \leq \|\nabla(u - I_1^{nc}u)\|^2$$

Ex 1.6.3

$$v \in H_{\partial \Omega}^1(\overline{\Omega})$$

$$I_1^{nc} v :=$$

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_h^{int}} \underbrace{\frac{\langle v, 1 \rangle_F}{|F|}}_{\substack{\text{coefficient, un réel} \\ \text{la valeur moyenne} \\ \text{de } v \text{ sur } \Omega \text{ par } F}} \underbrace{\psi_F}_{\text{base de } V_h^{nc}}$$

1) $I_1^{nc} : H_{\partial \Omega}^1(\overline{\Omega}) \rightarrow V_h^{nc}$

2) I_1^{nc} est linéaire

3) I_1^{nc} est une projection $\Leftrightarrow \pi_h \in V_h^{nc}$, alors $\left(\frac{\langle v, 1 \rangle_F}{|F|} \right)$
 $I_1^{nc}(\pi_h) = \pi_h$ est le

4) I_1^{nc} est stable (Thm 1.6.4) (Thm 1.6.5)

coefficient
dans la base
lagrangienne

Thm 2.6.5 (Stabilité de I_1^{nc})

$$\|\nabla_h I_1^{nc} v\| \leq C \|\nabla_h v\| \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\bar{\Omega})$$

~~$C = C(\tau)$~~ NON ! $\uparrow$?

$\Rightarrow$ plus tard, $C \neq C(h)$

~~$C = C(|\Gamma_h|)$~~ NON

$\uparrow$ nombre d'éléments de Γ_h

ça serait admissible,
mais pas le cas ici

$C = C(\eta)$... par exemple C dépend de ζ , ou $C = h \eta$
 $C = (K_{\Gamma_h}, d)$ $\hookrightarrow d = 1, 2, 3$ $\leftarrow$ paramètre de régularité de maillage ≤ 1 diamètre de Ω

Preuve : $N \in H_{\partial}^1(\bar{T}_h)$

si $N = \frac{(N_i)_{i \in K}}{|K|}$ sur chaque $K \in \bar{T}_h$

$$\begin{aligned} \nabla_h W &= \nabla_h v - \underbrace{\vec{r}_i}_{=0} \text{ const} \\ &= \nabla_h v \end{aligned}$$

si $N = \frac{(N_i)_{i \in K}}{|K|}$ valeur moyenne de v sur $K \in \bar{T}_h$

$\hookrightarrow$ sans perte de généralité, on peut considérer

$N \in H_{\partial}^1(\bar{T}_h)$ t.q. $\frac{(N_i)_{i \in K}}{|K|} = 0 \quad \forall K \in \bar{T}_h$

$$\| \nabla_h I_1^{\text{nc}} N \|_K = \underbrace{\| \nabla_h \left(\frac{(N_i)_{i \in K}}{|K|} \right) \|_K}_{\substack{\text{d'après la } I_1^{\text{nc}} \\ \text{inc. triangulaire}}} \leq \underbrace{\| \nabla_h \left(\frac{(N_i)_{i \in K}}{|K|} \right) \|_K}_{\substack{\text{fixe } K \in \bar{T}_h}}$$

$$\leq \sum_{F \in \overline{T}_K} \frac{|\langle N, 1 \rangle_F|}{|F|} \|D_h \varphi_F\|_K$$

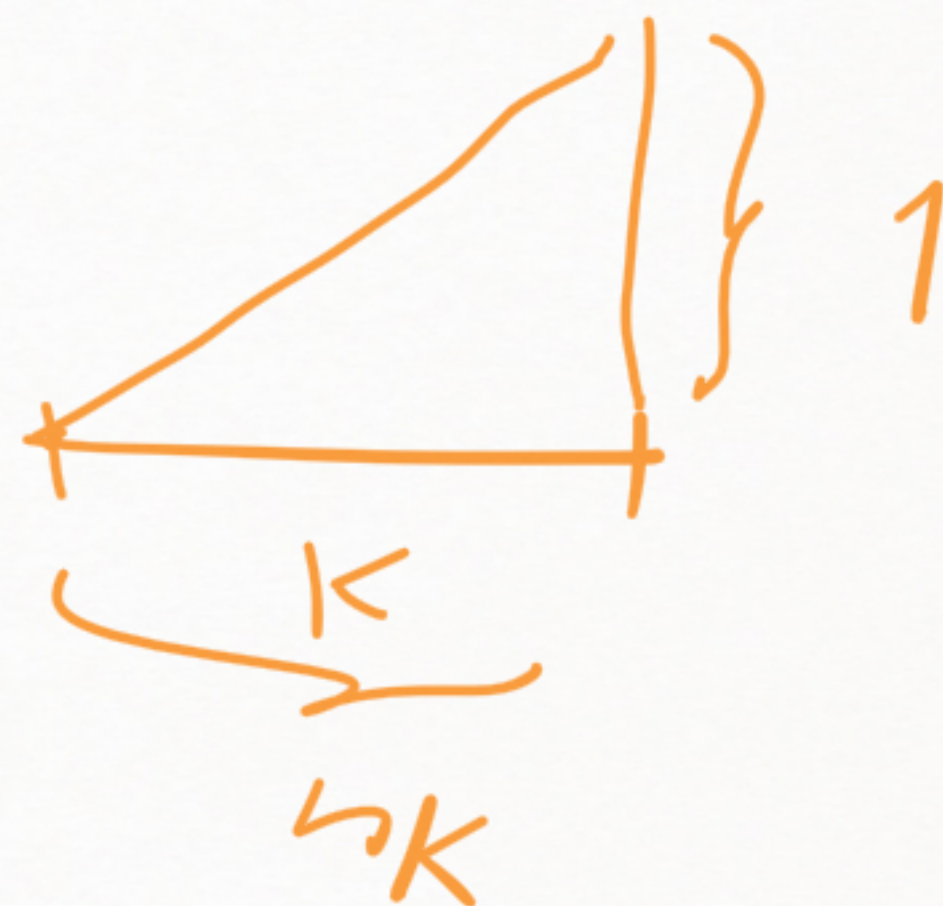
$$\|D_h \varphi_F\|_K = \left(\int |D_h \varphi_F|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\leq \sum_K C(K_T)^2 \int \frac{1}{h_K^2} dx \Bigg)^{1/2}$$

$$= C(K_T) \frac{1}{h_K} |K|^{1/2}$$

$$\leq \frac{h_K^{d/2}}{d^{1/2}} C(K_T) \frac{1}{h_K} \leq \underline{C(K_T, d)} h_K$$

$$1D \quad \varphi_F' = \frac{1}{h_K}$$



$$d=2, 3$$

$$|D_h \varphi_F| \leq C(K_T) \frac{1}{h_K}$$



$$F \in \tilde{F}_K$$

$$\frac{\langle N, 1 \rangle_F}{|F|} \leq \frac{\|N\|_F}{|F|} = \|N\|_F |F|^{-\frac{1}{2}} \quad d=2$$

$$= \|N - \underbrace{\langle N, 1 \rangle_K}_{\frac{|K|}{2}}\|_F |F|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\leq \underbrace{\frac{|K|}{2}}_{\text{injection trace/pointwise}} \leq C(K, d) h_K^{\frac{1}{2}} \|DN\|_K$$

$$\leq C(K, d) h_K^{\frac{1}{2}} (h_K^{d-1})^{-\frac{1}{2}} \|DN\|_K$$

$$= C(K, d) \left(\frac{h_K}{h_K^{d-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \underline{\underline{\|DN\|_K}}$$

$$\frac{h_K}{h_K^{d/2}}$$

$$\begin{aligned} |F| &\approx h_K^2 & d=2 \\ |F| &\approx h_K^3 & d=3 \\ |F| &\approx h_K^{d-1} & d-1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|D I_1^{hc} \gamma\|_K \leq C(K_{in}, d) \|\nabla \gamma\|_K \quad \checkmark$$