ENSTA Paris
Diplôme d'Ingénieur de l'ENSTA
Année universitaire 2020–2021

Analyse et approximation par éléments finis d'EDP
ANN202
Martin Vohralík

Examen *du 19 mars 2021*
2 heures
aucun document, appareil électronique ou aide extérieure
donner tout détail et justifier rigoureusement
échelle sur 20 points
les 4 exercices sont indépendants

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, un polytope (intervalle pour $d = 1$, polygone pour $d = 2$, polyèdre pour $d = 3$) avec la frontière $\partial\Omega$ Lipschitzienne. Dans les 3 premiers exercices, on considère le problème de Poisson avec les conditions de Dirichlet homogènes : pour $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$-\Delta u = f \qquad \text{dans } \Omega, \tag{1a}$$
$$u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1b}$$

Ci-dessous, $\mathcal{T}_h$ est un maillage de Ω composé de simplexes (intervalles pour $d = 1$, triangles pour $d = 2$, tétraèdres pour $d = 3$).

Exercice 1. (Formulation faible) (1 point)

1) (0.25 pt) Rappeler la formulation faible du problème (1), en se servant de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

2) (0.75 pt) Donner une preuve d'existence et d'unicité de la solution faible, en se basant sur le théorème de représentation de Riesz. On admet l'inégalité de Poincaré–Friedrichs

$$\|v\| \leq C_{\mathrm{PF}} h_\Omega \|\nabla v\| \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où C_{PF} est une constante générique et h_Ω le diamètre du domaine Ω.

Exercice 2. (Eléments finis non conformes) (8 points)

1) (0.25 pt) Rappeler l'espace V_{hp}^{nc} de la méthode des éléments finis non conforme, utilisant les polynômes par morceaux de degré $p \geq 1$ et une continuité faible à travers les faces du maillage $\mathcal{T}_h$.

2) (0.25 pt) Rappeler la méthode des éléments finis non conforme pour le problème (1).

3) (0.5 pt) Donner une preuve d'existence et d'unicité de la solution éléments finis non conformes. On admet que l'espace V_{hp}^{nc} est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(\nabla v_h, \nabla w_h) \qquad v_h, w_h \in V_{hp}^{\mathrm{nc}},$$

où ∇v_h est le gradient faible brisé,

$$(\nabla v_h)|_K := \nabla(v_h|_K) \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{2}$$

4) (1.5 pt) Soit $|V_{hp}^{\mathrm{nc}}|$ la dimension de l'espace V_{hp}^{nc}. Pour une base ψ_h^i, $1 \leq i \leq |V_{hp}^{\mathrm{nc}}|$, de l'espace V_{hp}^{nc}, considérer la matrice de rigidité

$$\mathbb{K}_{ij}^{\mathrm{nc}} := (\nabla \psi_h^j, \nabla \psi_h^i) \qquad 1 \leq i, j \leq |V_{hp}^{\mathrm{nc}}|.$$

Prouver qu'elle est symétrique, définie positive et inversible. On admet l'inégalité de Poincaré–Friedrichs brisée

$$\|v_h\| \leq C_{\mathrm{bPF}} h_\Omega \|\nabla v_h\| \qquad \forall v_h \in V_{hp}^{\mathrm{nc}},$$

où C_{bPF} est une constante générique et h_Ω le diamètre du domaine Ω.

5) (3.5 pt) Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution faible du problème (1) et $u_h \in V_{hp}^{\mathrm{nc}}$ son approximation par éléments finis non conformes. Donner une preuve du second lemme de Strang :

$$\|\nabla(u-u_h)\|^2 = \min_{v_h \in V_{hp}^{\mathrm{nc}}} \|\nabla(u-v_h)\|^2 + \left(\max_{w_h \in V_{hp}^{\mathrm{nc}}} \frac{(f,w_h)-(\nabla u, \nabla w_h)}{\|\nabla w_h\|} \right)^2. \tag{3}$$

6) (1 pt) Discuter la signification et portée de la formule (3).

7) (1 pt) Estimations d'erreur a priori permettent d'obtenir une formule de type

$$\|\nabla(u-u_h)\| \le Ch^\beta. \tag{4}$$

Sous quelles conditions sur la solution faible u ? Avec quelle puissance β ? Quelle est la signification de ce résultat ? (Réponses sans preuves.)

Exercice 3. (Estimations d'erreur a posteriori) (7 points)

Rappelons l'espace de Sobolev brisé

$$H^1(\mathcal{T}_h) := \{v \in L^2(\Omega);\ v|_K \in H^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} = \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^1(K).$$

1) (5 pt) Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution faible du problème (1) et $u_h \in H^1(\mathcal{T}_h)$ arbitraire. Rappelant la notation ∇u_h pour le gradient faible brisé de (2), démontrer que

$$\|\nabla(u-u_h)\|^2 = \min_{\substack{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = f}} \|\nabla u_h + \boldsymbol{v}\|^2 + \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \|\nabla(u_h - v)\|^2. \tag{5}$$

2) (1 pt) Discuter la signification et la portée de la formule (5).

3) (1 pt) Estimations d'erreur a posteriori permettent d'obtenir une formule de type

$$\|\nabla(u-u_h)\| \le \eta. \tag{6}$$

Sous quelles conditions sur la solution faible u ? Qu'est-ce que c'est η ? Quelle forme générale prend η ? Quelle est la signification de ce résultat ? (Réponses sans preuves.)

Exercice 4. (Eléments finis conformes pour équation elliptique non linéaire) (4 points)

On considère le problème non linéaire avec les conditions de Dirichlet homogènes suivant : pour $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\nabla u) = f \qquad \text{dans } \Omega, \tag{7a}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \tag{7b}$$

Ici, l'opérateur différentiel $v \to \boldsymbol{A}(\nabla v)$ est non linéaire mais fortement monotone et continu-Lipschitz, c'est-à-dire, ils existent deux constantes positives α et L telles que

$$\alpha\|\nabla(v-w)\|^2 \le (\boldsymbol{A}(\nabla v) - \boldsymbol{A}(\nabla w), \nabla(v-w)) \qquad \forall v,w \in H_0^1(\Omega), \tag{8a}$$

$$\|\boldsymbol{A}(\nabla v) - \boldsymbol{A}(\nabla w)\| \le L\|\nabla(v-w)\| \qquad \forall v,w \in H_0^1(\Omega). \tag{8b}$$

1) (0.25 pt) Rappeler la formulation faible du problème (7) (l'existence et l'unicité ne sont pas à démontrer).

2) (0.25 pt) Rappeler l'espace V_{hp} de la méthode des éléments finis conforme, utilisant les polynômes par morceaux de degré $p \ge 1$.

3) (0.25 pt) Rappeler la méthode des éléments finis conforme pour le problème (7) (l'existence et l'unicité ne sont pas à démontrer).

4) (2.25 pt) Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution faible du problème (7) et $u_h \in V_{hp}$ son approximation par éléments finis conformes. Démontrer que

$$\|\nabla(u-u_h)\| \le \frac{L}{\alpha} \min_{v_h \in V_{hp}} \|\nabla(u-v_h)\|. \tag{9}$$

5) (1 pt) Discuter la signification et la portée de la formule (9).