Méthodes mathématiques pour les Problèmes Inverses
TD1: Conditionnement, SVD

Exercise 1 (Problèmes bien posés, mal posés et équations différentielles).
Soit $I =]-1, 1[$. On se place dans $\mathscr{C}(I;\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, et on considère les équations différentielles suivantes sur I.

$$\dot{x} = ax + b, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \tag{E_1}$$

$$\dot{x} = \sqrt{|x|}, \tag{E_2}$$

$$\dot{x} = g(x), \quad \text{où } g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{E_3}$$

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on considère le problème suivant : *Etant donné $x_0 \in \mathbb{R}$, trouver une solution de l'équation différentielle (E_i) vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0$.*
Ce problème est-il bien posé ?
Indication: *Pour $i = 2$, on pourra considérer $x_0 = 0$ et les fonctions*

$$x(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}(t-C)\right)^2 & \textit{pour } t \geq C \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

avec par exemple $C = 0$, ou $C = \frac{1}{2}$.
Pour $i = 3$, on pourra considérer $x_0 = 0$ et se souvenir du théorème de Darboux : si f est continue et dérivable sur I et $[a, b] \subseteq I$, alors f' prend toutes les valeurs entre $f'(a)$ et $f'(b)$).

Exercise 2 (Conditionnement de la dérivation).
On considère l'espace E des polynômes trigonométriques sur $[0, 1]$ de degré inférieur ou égal à N, de moyenne nulle,

$$\forall f \in E, \quad f(t) = \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt)\right), \tag{2}$$

pour des coefficiens $\{a_k, b_k\}_{k=1}^N$ réels. On munit E de la norme uniforme, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

1. Montrer que l'opérateur de dérivation $A : f \mapsto f'$ est un isomorphisme de E dans E.
2. Donner une minoration de sa norme et de son conditionnement.

Exercise 3 (Décomposition en valeurs singulières des matrices).

1. Déterminer la décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes. Donner un résultat exact, avec le détail des calculs, ou des raisonnements qui permettent de les éviter.

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

2. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la décomposition en valeurs singulières de A. Sans aucun calcul, en déduire une factorisation QR de A.

Exercise 4 (Théorème d'Eckart-Young-Mirsky)**.**
Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice de rang r, et considérons sa décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma V^\top$. Pour $k \in \{1, \dots, r\}$, on note Σ_k la matrice obtenue en remplaçant dans Σ les valeurs σ_i par zéro pour $i \in \{k+1, \dots, r\}$.

1. On munit l'espace des matrices de taille $m \times n$ de la norme d'opérateur (dite norme spectrale) :
$$\|B\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Bx\|_2. \tag{4}$$
Exprimer $\|A\|$ en fonction de ses valeurs singulières. Montrer que la matrice $A_k = U\Sigma_k V^\top$ minimise $\|A - B\|$ parmi toutes les matrices B de rang inférieur ou égal à k.
2. Mêmes questions lorsqu'on munit l'espace des matrices de la norme de Frobenius
$$\|B\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}(B^\top B)} = \sqrt{\sum_{i,j} |b_{i,j}|^2}. \tag{5}$$
Indication: *Montrer qu'une matrice B optimale existe, et qu'elle peut s'écrire comme un produit $B = CR$ où $C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ et $R \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Montrer qu'on peut supposer que $RR^\top = I_k$ et que $C^\top C$ est diagonale.Regarder les conditions d'optimalité du problème*
$$\min_{\substack{C\in\mathbb{R}^{m\times k},\\ R\in\mathbb{R}^{k\times n}}} \|A - CR\|_F^2 . \tag{6}$$

Exercise 5 (Décomposition en valeurs singulières et analyse en composantes principales)**.**
On considère un nuage de n points encodé dans une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ qu'on supposera centré, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i = 0$.
On veut approcher ce nuage de points par un autre nuage $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tel que *ces points appartiennent à un sous-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à k* et qu'ils minimisent l'écart quadratique moyen :
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \|a_i - b_i\|_2^2 . \tag{7}$$
Proposer une façon de construire le nuage B. Commenter.
Indication: *Réécrire l'écart quadratique moyen et considérer l'exercice précédent.*