Méthodes mathématiques pours les problèmes inverses''

Vincent Duval

INRIA Paris (MOKAPLAN) & U. Paris-Dauphine (CEREMADE)

23 mars 2021

Organisation du cours

- Pour toute question, écrire à `vincent.duval@inria.fr`
- Cours/TD
- Un TP sur machine
- Une séance centrée autour de la géophysique (Hervé Chauris)
- Validation par projet (python/julia/matlab)

Problème direct

Système (paramètres. . .) $\xrightarrow{\text{Problème direct}}$ **Observations**

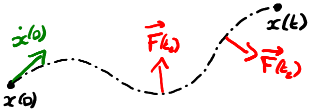
(+) Conductivité thermique
(+) Indice de réfraction

(+) Champ de température
(+) Distribution d'intensité lumineuse

- Les lois de la physique nous permettent de prédire des observations (résultats de mesures) à partir des paramètres d'un système.
- ~~Les "mêmes causes"~~ Des causes similaires produisent ~~les mêmes effets~~ des effets similaires.

Exemples de problèmes directs

- **Mécanique :**
  Étant donnés m, $x(0)$, $\dot{x}(0)$ et $\sum_i F_i$, déterminer $x(t)$:

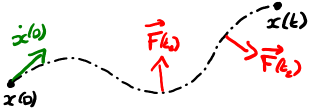


$$\boxed{m\ddot{x} = \sum_i F_i, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(0) = x_0.}$$

☞ EDO : Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la “stabilité”.

Exemples de problèmes directs

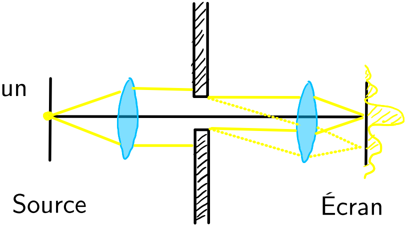
- **Mécanique :**
  Étant donnés m, $x(0)$, $\dot{x}(0)$ et $\sum_i F_i$, déterminer $x(t)$:



$$\boxed{m\ddot{x} = \sum_i F_i, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(0) = x_0.}$$

☞ EDO : Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la "stabilité".

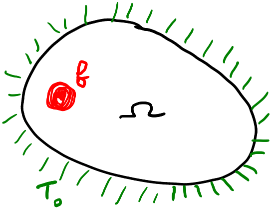
- **Optique :**
  Étant données une lentille et une distribution de sources lumineuses, déterminer l'intensité lumineuse sur un écran.



Exemples de problèmes directs

- **Thermique :**
  Étant donnés un domaine Ω muni d'une conductivité thermique a et entouré d'un thermostat à T_0, et des sources de chaleur f, déterminer T dans le domaine Ω.

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a\nabla T) = f & \text{dans } \Omega \\ T = T_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$



☞ EDP linéaire elliptique : Le théorème de Lax-Milgram nous assure l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la "stabilité".

Un problème direct est bien posé

En général, un problème direct, c'est-à-dire déterminer les observations à partir des paramètres d'un système, est un problème **bien posé**.

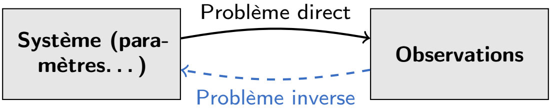
Jacques Hadamard (1865-1963)

Définition

On dit qu'un problème est bien posé **au sens de Hadamard** si

- La solution existe,
- Elle est unique,
- Elle dépend continûment des données.

Problème Inverse



(+) Conductivité thermique
(+) Indice de réfraction

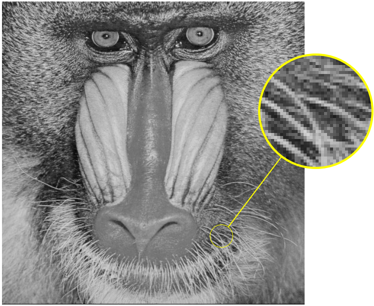
(+) Champ de température
(+) Distribution d'intensité lumineuse

Retrouver les paramètres d'un système à partir d'observations (partielles), le modèle d'observation étant supposé connu.

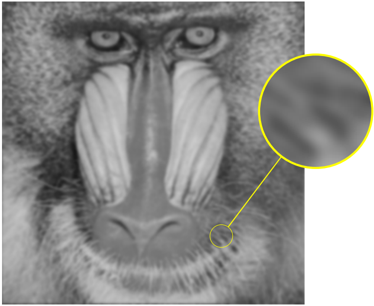
Cela est d'autant plus difficile qu'en pratique il faut également prendre en compte

- Le bruit de mesure
- La discrétisation,
- la quantification. . .

Exemples - Convolution



$f(x)$

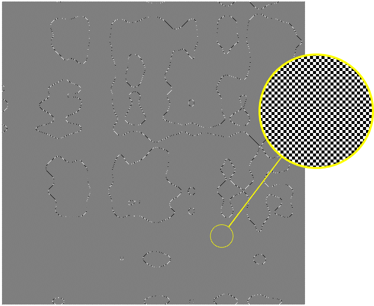


$g(x) = \int_\Omega f(x')g(x-x')\mathrm{d}x'$

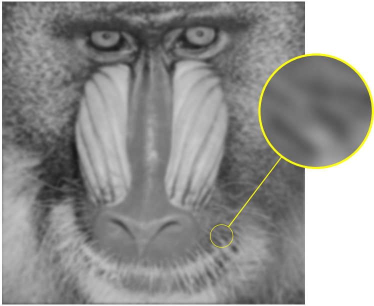
Problème direct Calculer g à partir de f

Problème inverse Retrouver f à partir de g

Exemples - Convolution



?



$g(x) = \int_\Omega f(x')g(x - x')\mathrm{d}x'$

Problème direct Calculer g à partir de f

Problème inverse Retrouver f à partir de g

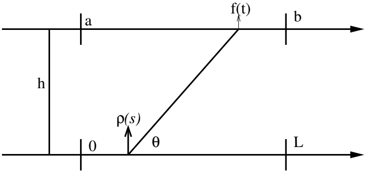
Exemple - Prospection gravimétrique

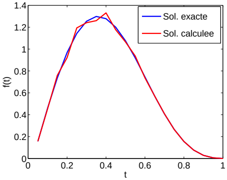
Déterminer une anomalie dans le champ de gravité, à partir de mesures en surface :

$$f(t) = G \int_0^L \frac{h^2}{\left((h^2 + (t-s)^2\right)^{3/2}} \rho(s) \mathrm{d}s, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

Problème direct Étant donnée ρ, calculer f (calcul d'intégrale).

Problème inverse Étant donnée f, retrouver ρ (résoudre une équation intégrale de première espèce).





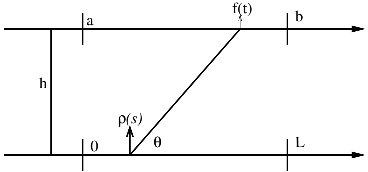
Exemple - Prospection gravimétrique

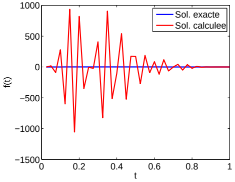
Déterminer une anomalie dans le champ de gravité, à partir de mesures en surface :

$$f(t) = G \int_0^L \frac{h^2}{\left((h^2 + (t-s)^2\right)^{3/2}} \rho(s) \mathrm{d}s, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

Problème direct Étant donnée ρ, calculer f (calcul d'intégrale).

Problème inverse Étant donnée f, retrouver ρ (résoudre une équation intégrale de première espèce).

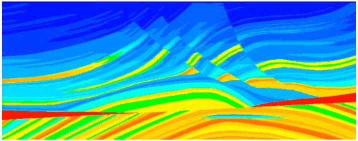


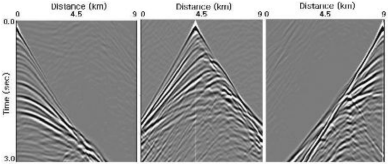


Résoudre un problème inverse

Autres applications

- Microscopie,
- Imagerie médicale,
- Radar,
- Prospection sismique,
- Hydrogéologie
- Génie chimique. . .





Résoudre un problème inverse

Autres applications

- Microscopie,
- Imagerie médicale,
- Radar,
- Prospection sismique,
- Hydrogéologie
- Génie chimique...

Existence ? Unicité ? Stabilité ?

Le problème inverse est d'autant plus mal posé que l'on dispose d'un **faible nombre de mesures** :

- Coûteux
- Dangereux (ex : rayons X)
- Impossible (prospection sismique)

Résoudre un problème inverse

Autres applications

- Microscopie,
- Imagerie médicale,
- Radar,
- Prospection sismique,
- Hydrogéologie
- Génie chimique. . .

Pour lever le mauvais conditionnement d'un problème inverse, il faut injecter un **a priori** sur la solution.

- Approche "régularisation" d'un problème inverse (faible norme, parcimonie)
- Approche baysésienne (Loi du paramètre, maximum a posteriori,. . .)

Programme du cours

Problèmes linéaires

$$\text{Résoudre} \qquad Ax = y$$

dans $H = \mathbb{R}^N$ ou H espace de Hilbert.

- Étude théorique à l'aide de la décomposition en valeurs singulières (SVD).
- Régularisation L^2 (Estimation aux moindes carrés, troncature spectrale, méthode de Tikhonov)
- Régularisation "parcimonieuse" (régularisation ℓ^0, OMP, LASSO. . .)
- Problèmes non linéaires, cas où y est donné par la solution d'une EDP. . .