Bonjour

section 1.7

Thm 1.7.1 (second Strang lemme)

- $u \in H^1_0(\Omega)$ sol. faible

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

- $u_h \in V^{nc}_{h,p} \subset H^1_{[\cdot]}(T_h)$ sol. EF non conformes $p \geq 1$

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V^{nc}_{h,p}$$

$$\|\nabla_h(u-u_h)\|^2 = \min_{v_h \in V^{nc}_{h,p}} \|\nabla_h(u-v_h)\|^2 + \left(\max_{w_h \in V^{nc}_{h,p}} \frac{(f, w_h) - (\nabla u, \nabla w_h)}{\|\nabla_h w_h\|} \right)^2$$

comme EF conformes – le meilleur objet de $V^{nc}_{h,p}$ – u

- $V^{nc}_{h,p} \not\subset H^1_0(\Omega)$ (non conformité)
- si $V^{nc}_{h,p} \subset H^1_0(\Omega)$ $(f, w_h) - (\nabla u, \nabla w_h) = 0$

Rem 1.7.2 (EF conformes)

- $u_h \in V_{h,p} \subset H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$(Du_h, Dv_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_{h,p}$$

- u_h la projection orthogonale de u sur $V_{h,p} \subset H_0^1(\Omega)$

- $$\|D(u - u_h)\| = \min_{v_h \in V_{h,p}} \|D(u - v_h)\|$$

Dém du 1.7.1

• $u \in H_0^1(\Omega) \subset H^1_{[\,]}(T_h)$, projection orthogonale dans $V_{hp}^{nc} \subset H^1_{[\,]}(T_h)$

$z_h \in V_{hp}^{nc}$ t.q. ← objet "global", n'est pas construit maille par maille

$\boxed{D}$ $\quad (D_h z_h, D_h v_h) = (\underbrace{D_h u}_{= Du}, D_h v_h) \quad \forall v_h \in V_{hp}^{nc}$

CS: $|(D_h u, D_h v_h)| \leq \underbrace{\|D_h u\|}_{\text{cnst}} \|D_h v_h\|$

• $\exists !\, z_h \in V_{hp}^{nc}$ par le thm de Riesz

(forme linéaire – continue

$(D_h u_h, D_h v_h)$ produit scalaire sur V_{hp}^{nc})

• $v_h \in V_{hp}^{nc}$ arbitraire

$\|D_h(u - v_h)\|^2 = \|D_h(u - z_h + z_h - v_h)\|^2$

$= \|D_h(u - z_h)\|^2 + \cancel{2(D_h(u - z_h), D_h(\underbrace{z_h - v_h}_{\in V_{hp}^{nc}}))} + \|D_h(z_h - v_h)\|^2$

$\cancel{2(\ldots)} = 0$ $\boxed{D}$ avec $v_h = z_h - v_h$

$$\|D_h(u - z_h)\|^2 = \|D_h(u - v_h)\|^2 - \|D_h(z_h - v_h)\|^2$$

$$\leq \|D_h(u - v_h)\|^2$$

mais $v_h \in V_{h,j}^{nc}$ est arbitraire $\Rightarrow$ $\boxed{\|D_h(u - z_h)\| = \min_{v_h \in V_{h,j}^{nc}} \|D_h(u - v_h)\|}$

① pour $v_h = u_h$ (EF non conformes)

$$\|D_h(u - u_h)\|^2 = \underbrace{\|D_h(u - z_h)\|^2}_{\text{1er terme de l'énoncé}} + \|D_h(z_h - u_h)\|^2 = (f, w_h) \text{ EF non conformes}$$

1er terme de l'énoncé ✓

• $$\|D_h(\underbrace{z_h - u_h}_{\in V_{h,j}^{nc}})\| = \max_{w_h \in V_{h,j}^{nc}} \frac{(D_h(z_h - u_h), D w_h)}{\|D w_h\|} = \max \frac{(Du, Dw_h) - \overbrace{(Du_h, Dw_h)}^{=(f, w_h)}}{\|Dw_h\|}$$

2ème terme de l'énoncé ✓

$\square$

ne dépend que de u - sol faible

section 1.8

Thm 1.8.2 $(p=1)$

- $u \in H^1_0(\Omega)$ solution faible
- $u_h \in V_{h,p}^{nc}$ solution EF non conforme
- $u|_K \in H^2(K)$ $\forall K \in \mathcal{T}_h$

moins restrictif que $\longrightarrow$ ~~$u \in H^2(\Omega)$ d'habitude~~

- il existe une constante C qui dépend seulement de la régularité de maillage $\kappa_{\mathcal{T}_h} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K}$ et de dimension d'espace d t.q.

$h_K \leftarrow$ diam K

$\rho_K \leftarrow$ diam cercle inscrit

ρ_K ✓

h_K

$$\|\nabla_h(u-u_h)\| \le C\left\{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \underbrace{h_K^2}_{\le h^2} |u|^2_{H^2(K)}\right\}^{1/2} \le Ch\left\{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u|^2_{H^2(K)}\right\}^{1/2}$$

$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$

- $u|_K \in H^2(K)$ crucial — solution faible doit avoir une régularité élevée — H^2 par maille
- si la taille de maillage tend vers 0, $h \to 0$, alors u_h approche u justification de la méthode
- pour $P = 1$, $u|_K \in H^2(K)$ et $P = 1$

  erreur $\leq C h$ borne optimale

  polynômes degré 1 permettent d'approcher u à l'ordre 1 si le maillage est raffiné uniformément
- On peut faire mieux avec raffinement local/adaptatif

Démonstration

$$\|\nabla_h(u - z_h)\|^2$$
$$\|$$

- Thm 1.7.1 $$\|\nabla_h(u-u_h)\|^2 = \underbrace{\min_{v_h \in V_{h,1}^{nc}} \|\nabla_h(u-v_h)\|^2}_{①} + \underbrace{\left(\max_{w_h \in V_{h,1}^{nc}} \frac{(f, w_h) - (\nabla u, \nabla w_h)}{\|\nabla_h w_h\|}\right)^2}_{②}$$

- ① $$\leq \|\nabla_h(u - \underbrace{I_1^{nc} u}_{\text{interpolation de } u})\| = \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla_h(u - I_{1,K}^{nc} u)\|_K^2 \right\}^{1/2}$$

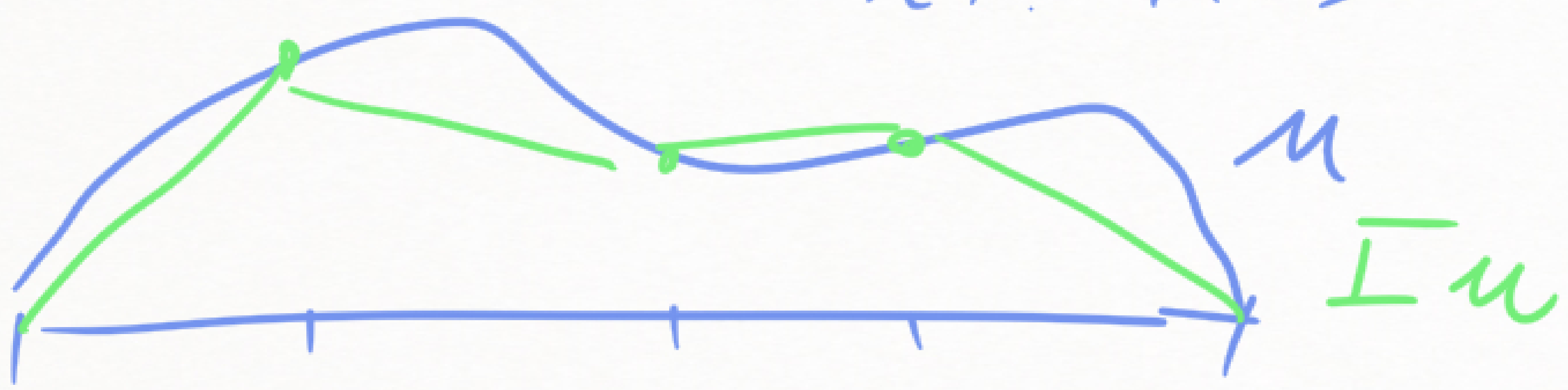
$I_1^{nc} u \in V_{h,1}^{nc}$

passage conceptuel de u_h ($\mathcal{F}_i$ = nonconformes)

↗ Déf. 1.6.3

→ interpolé de u construit localement maille par maille

1D



- pour borner ①, il suffit donc désormais d'étudier l'erreur d'interpolation de $u|_K$
- on veut $$\|\nabla(u - \mathcal{I}_1^{nc} u)\|_K \leq C h_K |u|_{H^2(K)}$$
- projection orthogonale sur $P_1(K)$ (polynômes de degré 1 sur la maille K (local sur la maille K)
$$v \in H^1(K) \to P_1 v \in P_1(K) \quad \text{t.q.}$$
$$(\nabla P_1 v, \nabla v_h)_K = (\nabla v, \nabla v_h)_K \qquad \forall v_h \in P_1(K)$$
- Thm 18.1
$$\|\nabla(v - P_1 v)\|_K = \min_{v_h \in P_1(K)} \|\nabla(v - v_h)\| \leq \sqrt{2}\,\frac{h_K}{\pi} |v|_{H^2(K)}$$

- I_1^{nc} est un projecteur $\iff$ $I_1^{nc} v_h = v_h$ pour $v_h \in V_{h1}^{nc}$ $\Rightarrow$ $I_1^{nc} P_1 u = P_1 u$

- $$\| D(u - I_1^{nc} u) \|_K = \| D(u - P_1 u + P_1 u - I_1^{nc} u) \|_K$$

I_1^{nc} projecteur

$$= \| D(u - P_1 u) + D(I_1^{nc} P_1 u - I_1^{nc} u) \|_K$$

I_1^{nc} est linéaire

$$= \| D(u - P_1 u) + D(I_1^{nc}(P_1 u - u)) \|_K$$

in. triangulaire

$$\leq \| D(u - P_1 u) \|_K + \| D(I_1^{nc}(P_1 u - u)) \|_K$$

I_1^{nc} est stable

$$\leq \| D(u - P_1 u) \|_K + C(K_{in}, d) \| D(P_1 u - u) \|_K$$

$$= (1 + C(K_{in}, d)) \| D(u - P_1 u) \| \leq h_K \frac{\sqrt{2}}{\pi} (1 + C(K_{in}, d)) |u|_{H^2(K)}$$

• ② $w_h \in V_{h,0}^{nc}$, fixé

$$(f, w_h) - (\nabla u, \nabla_h w_h) = \sum_{K\in T_h} \Big\{ (f, w_h)_K - (\nabla u, \underset{\nabla w_h}{\underbrace{\nabla_h w_h}})_K \Big\}$$

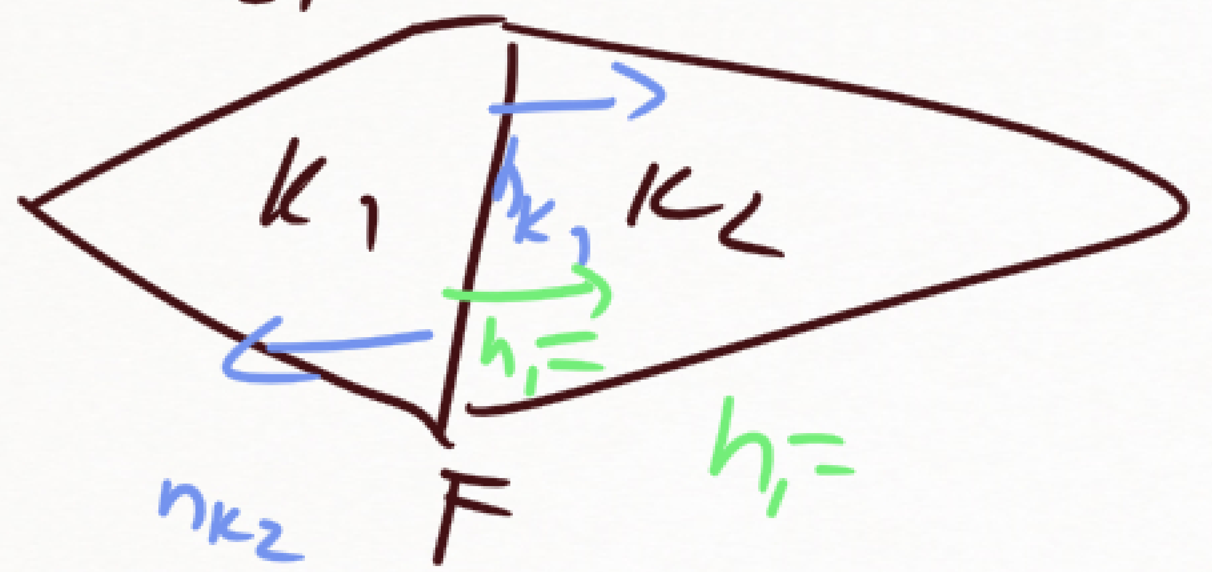
Green $u|_K \in H^2(K) \to \nabla u \in H(\mathrm{div}, K)$

$$= \sum_{K\in T_h} \Big\{ \underbrace{(f, w_h)_K + (\nabla\cdot \underbrace{(\nabla u)}_{=\Delta u}, w_h)_K}_{(\underbrace{f + \Delta u}_{=0}, w_h)_K} - \langle \nabla u \cdot n, w_h \rangle_{\partial K} \Big\}$$

$=0$ car u sol. faible & $u|_K \in H^1(K)$

$\nabla u \in H(\mathrm{div}, \Omega)$

$\nabla u|_{K_1} \cdot n_{K_1} = -\nabla u|_{K_2} \cdot n_{K_2}$



$-\nabla u|_{K_1} \cdot n_{K_1} w_h - \nabla u|_{K_2} \cdot n_{K_2} w_h$

$= -\nabla u|_{K_1} \cdot n_{K_1} (w_h|_{K_1} - w_h|_{K_2})$

$$= -\sum_{K\in T_h} \langle \nabla u \cdot n, w_h \rangle_{\partial K} = -\sum_{F\in T_h} \langle \nabla u \cdot n_F, [\![w_h]\!] \rangle_F$$

$w_h \in V_h^{nc}$

$\langle [\![w_h]\!], 1 \rangle_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h$

$$\Rightarrow \quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \langle \underbrace{Du \cdot n_F}, [\![w_h]\!] \rangle_F$$

je peux enlever une constante

$$\left\{ \begin{array}{l} (Du)_F := \left(\dfrac{\langle (Du)^1, 1 \rangle_F}{|F|}, \dfrac{\langle (Du)^2, 1 \rangle_F}{|F|} \right) \leftarrow \\ (Du)_F \cdot n_F = \text{constante} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{vecteur} \\ \text{constant} \\ \text{Polynôme} \end{array} \right\}$$

$$= - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \langle (Du - (Du)_F) \cdot n_F, [\![w_h]\!] \rangle_F \leq \overset{\text{???}}{\leq} C(\mathcal{K}_h, d) \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |u|_{H^2(K)}^2 \right\}^{1/2} \|Dw_h\|$$