

Projet informatique sur ordinateur

La méthode des éléments finis non conforme : convergence illustrant les estimations d'erreur a priori, reconstruction du potentiel, reconstruction du flux équilibré, estimations d'erreur a posteriori et adaptivité de maillage

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un polygone. On considère le problème de Poisson avec le terme source $f \in L^2(\Omega)$ et les conditions de Dirichlet possiblement non homogènes, données par une fonction u_D sur le bord $\partial\Omega$ de Ω : trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (1a)$$

$$u = u_D \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (1b)$$

La solution du problème (1) est une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u = u_D$ sur $\partial\Omega$ et telle que

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2)$$

Soit \mathcal{T}_h un maillage de Ω composé de triangles.

Exercice 1. (La méthode des éléments finis non conforme)

L'espace de polynômes faiblement continus de Crouzeix–Raviart de plus bas degré $p = 1$ est donné par

$$V_{h1}^{\text{nc}} = \{v_h \in \mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h); \langle \llbracket v_h \rrbracket, 1 \rangle_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h\}. \quad (3)$$

Pour pouvoir prendre en compte les conditions de Dirichlet non homogènes, nous aurons également besoin de l'espace un peu plus grand

$$V_{h1}^{\text{nc,b}} = \{v_h \in \mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h); \langle \llbracket v_h \rrbracket, 1 \rangle_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}\} \quad (4)$$

qui n'impose pas les valeurs zéro aux points milieux \mathbf{x}_F des faces $F \in \mathcal{F}_h^{\text{ext}}$ (se trouvant au bord $\partial\Omega$). La méthode des éléments finis non conforme approche u de (2) par $u_h \in V_{h1}^{\text{nc,b}}$ telle que $u_h(\mathbf{x}_F) = u_D(\mathbf{x}_F)$ pour toute face $F \in \mathcal{F}_h^{\text{ext}}$ et telle que

$$(\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_{h1}^{\text{nc}}. \quad (5)$$

1) La matrice de rigidité de (5) est donnée par

$$\mathbb{K}_{FF'}^{\text{nc}} := (\nabla_h \psi^{F'}, \nabla_h \psi^F) \quad F, F' \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}$$

pour la base Lagrangienne ψ^F , $F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}$, de l'espace V_{h1}^{nc} . Celle-ci est donnée par les fonctions $\psi^F \in V_{h1}^{\text{nc}}$ telles que $\psi^F(\mathbf{x}_F) = 1$ pour la face $F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}$ et $\psi^F(\mathbf{x}_{F'}) = 0$ pour toute autre face $F' \in \mathcal{F}_h$, $F' \neq F$, cf. la Figure 1, la Définition 1.6.1 du polycopié et les travaux dirigés N°1. On pourra noter que

$$(\nabla_h \psi^F)|_K = \nabla(\psi^F|_K) = \frac{|F|}{|K|}(\mathbf{n}_K)|_F,$$

où $|F|$ est l'air (longueur) de la face F , $|K|$ est le volume (air) de l'élément K et \mathbf{n}_K est le vecteur unitaire normal sortant de l'élément K . Cette propriété permet une implémentation informatique rapide de la matrice de rigidité.

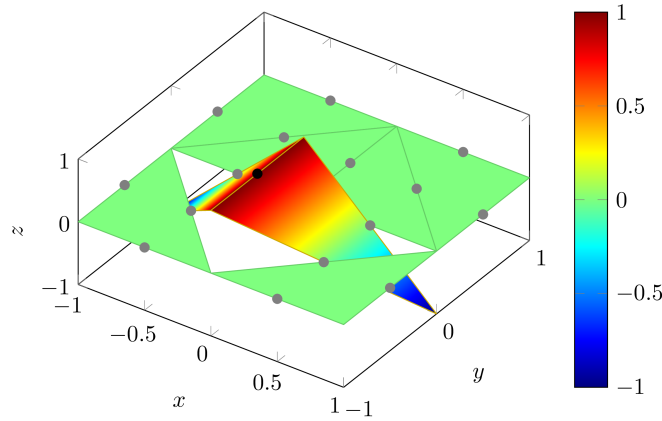


FIGURE 1 – Fonction de base ψ^F de l'espace V_{h1}^{nc} , $d = 2$ et $p = 1$

2) Mettre en œuvre informatiquement la méthode (5) à l'aide du logiciel FreeFem++, librement disponible sur <https://freefem.org/>.

3) Un script initial est fourni. Ici, on procède (à titre d'illustration) comme suit :

- (a) `int nds = 5; // number of mesh points on one domain unity edge`
`macro Pcontp P2 // $H^1(\Omega)$ -conforming pw polynomials for plotting the exact solution : "P2" or "P3" or "P4"`
`macro Pcont P1 // $H^1(\Omega)$ -conforming pw polynomials for the potential reconstruction : "P1" or "P2" or "P3" or "P4"`
`macro RT RT0 // $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conforming pw polynomials for the flux reconstruction : "RT0" or "RT1" or "RT2"`
`macro Pdiscp P2dc // discontinuous pw polynomials for plotting the fluxes and flux reconstruction : "P2dc" or "P3dc" or "P4dc"`
`macro Pdisc P0 // Lagrange multipliers of the RT space : "P0" or "P1dc" or "P2dc"`
- (b) `int verb = 0; // verbosity for demonstrations and debugging`
`PlotSolAppr = 1, PlotSolApprFluxes = 1, PlotPotRec = 1,`
`PlotFluxRec = 1, PlotDetails = 1, PlotErr = 1, PlotEst = 1; // what to plot`
`bool RecFlux = 1, Err = 1, Est = 1; // what to compute`
`bool AdaptiveRefinement = 0; // whether to refine the mesh adaptively`
- (c) Spécifier la solution exacte u avec ses dérivées, le second membre f et la condition de Dirichlet u_D . Ceci est montré dans la section **exact solution and its derivatives**.
- (d) Générer un maillage triangulaire \mathcal{T}_h de Ω . Pour un carré d'unité, dans Freefem++, cela se fait par la commande `mesh Th = square(nds, nds);`
- (e) Définir l'espace $V_{h1}^{nc,b}$ donné par (4) dans Freefem++ : cela se fait via la commande : `fespace VhNC(Th, P1nc);` // piecewise 1st order polynomials on the mesh \mathcal{T}_h , continuous in midpoints of the edges
- (f) Calculer l'approximation par éléments finis u_h donnée par (5). Ceci est réalisé par les commandes
`VhNC uh, vh; // NCFE approximation and test function`
`varf a(uh, vh) = int2d(Th) (Grad(uh)'*Grad(vh))`
`+ int2d(Th) (f*vh) + on(1,2,3,4, uh=gd); // weak form`
`matrix A = a(VhNC, VhNC, solver = SolverGlob); // construction of the matrix and choice of the linear algebraic solver`
`real[int] b = a(0, VhNC); // construction of the right-hand side`
`uh[] = A^-1*b; // algebraic solve`

Exercice 2. (Solution exacte régulière)

1) Considérer $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ et la solution exacte

$$u(x, y) = x(x - 1)y(y - 1). \quad (6)$$

Calculer à la main le terme source f correspondant.

2) Considérer d'abord un maillage fixe. Visualiser la solution exacte u et son approximation par les éléments finis non conformes u_h . Ceci est décrit dans le script `FreeFem++` dans le bloc `if(PlotSolAppr)`. Les degrés polynomiaux $2 \leq \dots \leq 4$ pour la visualisation de la solution exacte u peuvent être testés en changeant le paramètre `Pcontp` de `P2` à `P4`. (Dans la fenêtre graphique de `FreeFem++`, on peut zoomer par “+” et “-”, on avance par la touche “enter” et on peut revenir en arrière, pour des comparaisons répétitives, via “p”). Essayer différentes tailles de maillages, de quelques éléments à centaines de milliers d'éléments.

3) Aux quels espaces fonctionnels (C , L , H , brisés) appartiennent les fonctions u et u_h ?

4) Toujours sur un maillage fixe, tracer le flux de la solution exacte donnée par $-\nabla u$ et le flux de l'approximation par éléments finis donnée par $-\nabla u_h$. Notez que ceux-ci sont des vecteurs (flèches) en chaque point \mathbf{x} de Ω . Tracer aussi les tailles de $-\nabla u$ et $-\nabla u_h$, i.e., $|\nabla u|$ et $|\nabla u_h|$ (ceux-ci sont des scalaires en chaque point \mathbf{x} de Ω). La partie correspondante est décrite dans le script `FreeFem++` dans le bloc `if(PlotSolApprFluxes)`. (Dans la fenêtre graphique de `FreeFem++`, la taille des flèches est modifiée en appuyant sur “a” et “A”). Essayer différentes tailles de maillages, de quelques éléments à centaines de milliers d'éléments.

5) En continuation du point précédent, choisissez deux éléments de maillage voisins et tracez les détails, comme préparé dans le script dans la partie avec `if(PlotDetails)`. Qu'observez-vous? Le flux exact $-\nabla u$ semble-t-il être continu sur les faces du maillage, ou au moins avoir la composante normale $-\nabla u \cdot \mathbf{n}_F$ continue sur n'importe quelle face du maillage F ? (Ici, \mathbf{n}_F est un vecteur normal unitaire de F .) Notez que cette dernière propriété, plus faible, signifie que, pour une face de maille donnée F , ce qui “sort” d'un élément de maille partageant F à travers F “entre” dans l'autre élément de maille partageant F . Qu'en est-il de l'approximation du flux $-\nabla u_h$?

6) Aux quels espaces fonctionnels appartiennent les flux $-\nabla u$ ($-\text{gradient faible de } u$) et $-\nabla_h u_h$ ($-\text{gradient faible brisé de } u_h$)? Est-ce que $-\nabla_h u_h$ en particulier appartient à l'espace $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$?

7) Encore sur un maillage fixe, calculer l'erreur entre la solution exacte u de (2) et son approximation numérique par les éléments finis non conformes u_h de (5), i.e.,

$$\|\nabla_h(u - u_h)\|. \quad (7)$$

Calculer aussi ses contributions dans chaque élément du maillage $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\|\nabla(u - u_h)\|_K. \quad (8)$$

Visualiser ces contributions par élément. La partie correspondante est décrite dans le script `FreeFem++` fourni dans la fonction `func int ErrDist()`. Essayer différentes tailles de maillages, de quelques éléments à centaines de milliers d'éléments. Qu'observez-vous ?

8) Considérer maintenant une suite de maillages \mathcal{T}_h avec $h \rightarrow 0$ (modifiez simplement le paramètre `nds`). Calculer les erreurs $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ sur chaque maillage \mathcal{T}_h . Tracer $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ en fonction de h dans un graphe; ici, $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ avec h_K le diamètre

du triangle K (son arête la plus longue). Il convient de se servir des échelles log (en Matlab par exemple, la commande correspondante est `loglog(X,Y)`). Trouve-t-on

$$\|\nabla_h(u - u_h)\| \leq Ch^\alpha? \quad (9)$$

Pour quelle valeur de α ?

9) Tracer $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ aussi en fonction de $|V_{h1}^{\text{nc}}|$, la dimension de l'espace V_{h1}^{nc} , i.e., le nombre de faces intérieures du maillage, dans un deuxième graphe. Observez-vous aussi un comportement de type

$$\|\nabla_h(u - u_h)\| \leq C|V_{h1}^{\text{nc}}|^\beta? \quad (10)$$

Pour quelle valeur de β ?

10) Comment les formules (9) et (10) se comparent ?

Exercice 3. (Solution exacte singulière)

1) Considérer $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$ et la solution exacte, en coordonnées polaires et avec $\theta \in (0, 3\pi/2)$ (attention, il faut éviter les coordonnées polaires avec θ entre $-\pi$ et π)

$$u(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin(2\theta/3). \quad (11)$$

Vérifier que le terme source correspondant est $f = 0$ dans (1a), alors que la condition de Dirichlet u_D est donnée par

$$u_D := r^{\frac{2}{3}} \sin(2\theta/3) \text{ sur } \partial\Omega. \quad (12)$$

2) Reprenez la question 2) de l'Exercice 2.

3) Reprenez la question 4) de l'Exercice 2. Testez en particulier les degrés polynomiaux $2 \leq \dots \leq 4$ pour la visualisation de la solution exacte u et son flux $-\nabla u$, en changeant les paramètres `Pcontp` de `P2` à `P4` et `Pdiscp` de `P2dc` à `P4dc`. Examinez en particulier le point $(0, 0)$ et son voisinage. Qu'observez-vous ?

4) Considérer une suite de maillages \mathcal{T}_h avec $h \rightarrow 0$ et reprenez le point précédent.

5) Quels sont les valeurs de $-\nabla u$ et $|\nabla u|$ dans le point $(0, 0)$? Calculez à la main et comparez à ce que vous avez observé dans les deux points précédents. Cherchez des explications. (Attention, FreeFem++ fait des approximations parfois).

6) Reprenez la question 5) de l'Exercice 2.

7) Reprenez la question 7) de l'Exercice 2.

8) Considérer une suite de maillages \mathcal{T}_h avec $h \rightarrow 0$. Calculer les erreurs $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ sur chaque maillage. Tracer $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ en fonction de h et de $|V_{h1}^{\text{nc}}|$ dans deux graphes. Il convient à nouveau de se servir des échelles log. Observez-vous (9) et/ou (10) ? Pour quels exposants α et β ?

Exercice 4. (Reconstruction du potentiel)

1) Mettre en œuvre informatiquement la procédure de reconstruction du potentiel s_h selon la Définition 2.3.1 du polycopié. Attention, une modification est à apporter pour la condition de Dirichlet non homogène (12). Alternativement, au bord $\partial\Omega$, on pourra aussi plutôt prendre la valeur moyenne de toutes les valeur dans les points de Lagrange. Des idées de comment procéder sont données dans le script Freefem++ fourni dans le bloc `if(PlotPotRec)`, se basant sur la commande Freefem++ `mean`.

2) Comparer u_h et s_h graphiquement pour les deux cas test des Exercices 2 et 3. Qu'observez-vous ? Vous pourrez aussi visualiser la différence $u_h - s_h$ (une bonne idée est d'utiliser l'espace `Pdiscp` dans ce but).

Exercice 5. (Reconstruction du flux équilibré)

1) Mettre en œuvre informatiquement la procédure de reconstruction du flux équilibré σ_h selon la Définition 3.1.1 du polycopié. Attention, il faudra remplacer $f|_K$ par la valeur moyenne de f sur l'élément K dans le premier cas test. Dans ce but, la projection L^2 orthogonale de f sur de polynômes discontinus par morceau est préparée dans le script `FreeFem++`, bloc `if(RecFlux)`.

2) Comparer $-\nabla_h u_h$ et σ_h graphiquement pour les deux cas test des Exercices 2 et 3.

Exercice 6. (Estimations d'erreur a posteriori)

1) Mettre en œuvre informatiquement les estimations d'erreur a posteriori selon le Théorème 4.4.1 du polycopié. On ignorerait que $f \notin \mathcal{P}_0(\mathcal{T}_h)$ dans le premier cas test et que $u|_{\partial\Omega} \neq 0$ dans le deuxième cas test.

2) Tracer l'erreur $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ et l'estimateur $\eta(u_h)$ en fonction de $|V_{h1}^{nc}|$ dans un graphe, pour chacun des deux cas test des Exercices 2 et 3. Il convient à nouveau de se servir des échelles log. Qu'observe-t-on ?

3) Tracer l'indice d'efficacité

$$I_{\text{eff}} := \frac{\eta(u_h)}{\|\nabla_h(u - u_h)\|} \quad (13)$$

en fonction de $|V_{h1}^{nc}|$ dans un graphe, pour chacun des deux cas test des Exercices 2 et 3. L'échelle log ne convient ici que pour $|V_{h1}^{nc}|$ (commande `semilogx(X,Y)` en Matlab). Qu'observe-t-on ?

4) Visualisez les erreurs $\|\nabla_h(u - u_h)\|_K$ et les estimateurs $\eta_K(u_h)$ dans chaque triangle du maillage \mathcal{T}_h par une couleur. Ceci est déjà effectué dans le script `FreeFem++` dans la fonction `func int ErrDist()` pour les erreurs. Qu'observe-t-on en les comparant ? Essayer différentes tailles de maillages.

Exercice 7. (Adaptivité de maillage)

1) Essayer de profiter des estimateurs d'erreur a posteriori $\eta_K(u_h)$ calculés dans chaque triangle $K \in \mathcal{T}_h$. Le but est de ne pas raffiner toutes les mailles du maillage $K \in \mathcal{T}_h$ comme précédemment, mais seulement celles avec une valeur $\eta_K(u_h)$ élevée. On pourrait par exemple choisir un paramètre $0 < \theta \leq 1$ et identifier un sous-ensemble \mathcal{M}_h de tous les éléments du maillage \mathcal{T}_h tel que

$$\sum_{K \in \mathcal{M}_h} \eta_K(u_h)^2 \geq \theta^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K(u_h)^2$$

et puis seulement « raffiner » les éléments dans \mathcal{M}_h par un facteur donné. Comment procéder est indiqué dans le bloc du script `FreeFem++` `if(AdaptiveRefinement)`. On pourra ensuite utiliser la commande `FreeFem++`

```
Th = adaptmesh(Th, ElSizes, IsMetric=1, keepbackvertices=0, nbvx=1000000);
```

2) Mettre au point l'adaptation du maillage décrite ci-dessus. Tracer $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ et $\eta(u_h)$ en fonction de $|V_{h1}^{nc}|$ dans un graphe, pour chacun des deux cas test des Exercices 2 et 3. Il convient toujours de se servir des échelles log. Qu'observe-t-on? Comparer le raffinement uniforme de maillage des Exercices 2 et 3 avec ce raffinement de maillage dit « adaptatif ».